

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

ÜSTEL FONKSİYON

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona **üstel fonksiyon** adı verilir.

$a > 0$ olduğundan $f(x) = a^x > 0$ olur.

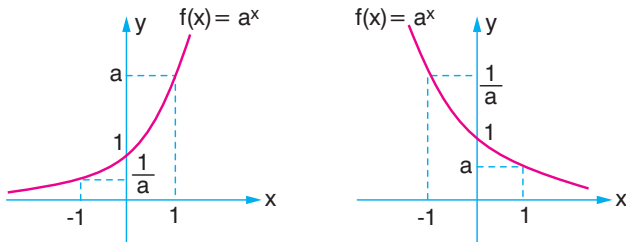
ÖRNEK

- a. $f(x) = 3^x$
- b. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- c. $h(x) = x^3$
- d. $k(x) = (-4)^x$

fonksiyonlarının üstel fonksiyon olup olmadıklarını inceleyelim.

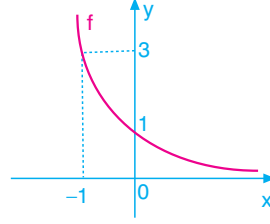
NOT

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda çizilmiştir.



- $a > 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonu artandır.
- $0 < a < 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonu azalandır.

ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) $f(x) = 3^x$
- B) $f(x) = 3^{x+1}$
- C) $f(x) = 3^{1-x}$
- D) $f(x) = 3^{-x}$
- E) $f(x) = 2^{-x}$

ÖRNEK

- I. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^{-x}$
- II. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
- III. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

fonksiyonlardan hangileri bire bir ve örten?

- A) I ve III
- B) Yalnız I
- C) I ve II
- D) Yalnız III
- E) I, II ve III

LOGARİTMA FONKSİYONU

Üstel fonksiyonun bire bir ve örten olduğunu öğrendik. Dolayısıyla, bu fonksiyonun tersi de bir fonksiyondur.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna **logaritma fonksiyonu** denir.

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x$$

şeklinde gösterilir.

$\log_a x$ ifadesi "logaritma a tabanında x" biçiminde okunur.

NOT

Ters fonksiyonun tanımına göre,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \text{ dir.}$$

ÖRNEK

Aşağıda verilen eşitliklerde x değerini bulalım.

- a. $2^x = 3$
- b. $3^{x+1} = 6$
- c. $5^{-x} = 2$

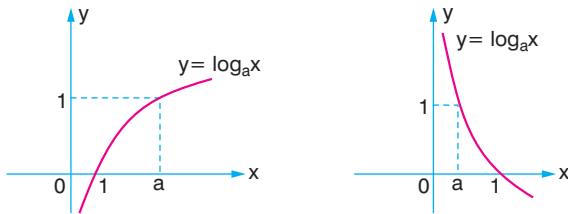
ÖRNEK

Aşağıda verilen eşitliklerde x değerini bulalım.

- a. $\log_2 x = 4$
- b. $\log_x 9 = 2$
- c. $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

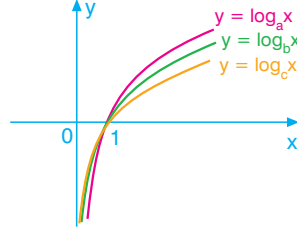
NOT

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda çizilmiştir.



- $a > 1$ olduğunda $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu artandır.
- $0 < a < 1$ olduğunda $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu azalandır.
- $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.

ÖRNEK

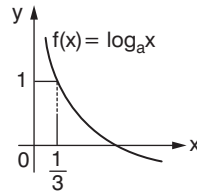


Şekildeki fonksiyonların grafikleri $(1, 0)$ noktasından geçmektedir.

Buna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a < b < c$
- B) $a < c < b$
- C) $c < a < b$
- D) $b < a < c$
- E) $c < b < a$

ÖRNEK



Yukarıda $\log_a x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $f\left(f\left(\frac{1}{27}\right)\right)$ değeri kaçtır?

- A) -9
- B) -4
- C) -3
- D) -2
- E) -1

ÖSYM Sorusu

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TANIM KÜMESİ

$f(x) = \log_a x$ in tanımlı olması için aşağıdaki üç koşulun sağlanması gerekir:

- $x > 0$
- $a > 0$
- $a \neq 1$

ÖRNEK

$$f(x) = \log_{(x+2)}(5-x)$$

fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

DOĞAL LOGARİTMA FONKSİYONU

x sayısının alacağı çok büyük pozitif değerler ve çok küçük negatif değerler için $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ifadesi bir değere yaklaşır. Bu değere e sayısı denir.

► $e \approx 2,718281828....$ olup irrasyonel bir sayıdır.

NOT

Tabanı e olan $y = f(x)$ logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = \log_e x = \ln x$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

ONLUK LOGARİTMA FONKSİYONU

Tabanı 10 olan $y = f(x)$ logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** denir.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = \log_{10} x = \log x$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

Pozitif gerçel sayılardan gerçel sayılarda tanımlı,

$$y = \log x \text{ ve } y = \ln x$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TERSİ

$f: A \rightarrow B, f(x) = y$ fonksiyonu için, $f^{-1}: B \rightarrow A, f^{-1}(y) = x$ tir.

$y = f(x)$ biçimindeki bir f fonksiyonunun tersini bulmak için x yalnız bırakılır. Tanım ve değer kümeleri yer değiştirdiğinden x ile y nin de yerleri değiştirilir.

NOT

► $f(x)$ in grafiği ile $f^{-1}(x)$ in grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetrik.

► $f(x) = \log_a x$ ise $f^{-1}(x) = a^x$ tir.

► $f(x) = a^x$ ise $f^{-1}(x) = \log_a x$ tir.

ÖRNEK

$$y = 2^x \text{ ve } y = \log_2 x$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

ÖRNEK

$f: \left(\frac{-1}{3}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \log_3(3x + 1)$$

ile tanımlanıyor.

Buna göre, ters fonksiyonu belirten $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f^{-1}(x) = 3^x$

B) $f^{-1}(x) = 3^x + 1$

C) $f^{-1}(x) = \log(3x + 1)$

D) $f^{-1}(x) = \frac{3^x - 1}{3}$

E) $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$

ÖSYM Sorusu**ÖRNEK**

$$f(x) = 3^{x+2} - 1$$

fonksiyonu için, $f^{-1}(8)$ değeri kaçtır?

A) -1

B) 0

C) 1

D) 2

E) 3

ÖRNEK

f tanımlı olduğu kümede bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = 1 - \log_5(x - 7)$$

olduğuna göre, $f^{-1}(-1)$ kaçtır?

A) 12

B) 24

C) 32

D) 36

E) 40