

POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARLA İŞLEMLER

POLİNOMLAR

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$$

biçimindeki ifadeler x değişkenine göre düzenlenmiş gerçel katsayılı **polinom** denir.

x değişkenine bağlı bir polinom genellikle $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ gibi sembollerle gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri inceleyelim.

- $P(x) = x^2 + 2x + 5$ ifadesi polinomdur.
- $Q(x) = x^{50} + x - 100$ ifadesi polinomdur.
- $R(x) = 1000$ ifadesi polinomdur.
- $T(x) = \sqrt{2}x^5 - \sqrt{3}$ ifadesi polinomdur.
- $M(x) = x^{-2} + 5$ ifadesinde $-2 \notin \mathbb{N}$ olduğundan $M(x)$ gerçel katsayılı polinom **değildir**.
- $H(x) = \sqrt{-7}x^5 + 2x$ ifadesinde $\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$ olduğundan $H(x)$ gerçel katsayılı polinom **değildir**.

POLİNOMLARLA İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$ polinomunda,

- $a_0, a_1 \cdot x, a_2 \cdot x^2, a_3 \cdot x^3, \dots, a_n \cdot x^n$ ifadelerine polinomun **terimleri** denir.
- $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ gerçel sayılarına polinomun **katsayıları** denir.
- $a_n \cdot x^n$ terimindeki a_n sayısına terimin **katsayısı** denir.
- Değişkene bağlı olmayan terime (a_0) polinomun **sabit terimi** denir.
- Her terimdeki x in kuvvetine **terimin derecesi** denir.
- Terimlerden derecesi en büyük olan terimin derecesine polinomun **derecesi** denir ve **der[P(x)]** ile gösterilir.
- Derecesi en büyük olan terimin katsayısına ise polinomun **baş katsayısı** denir.

ÖRNEK

$$P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 12$$

polinomu için aşağıdaki ifadeleri inceleyelim.

- $-2x^3, 5x^2, -3x$ ve 12 polinomun terimleridir.
- $-2, 5, -3,$ ve 12 polinomun katsayılarıdır.
- Sabit terimi 12 dir.
- $\text{der}[P(x)] = 3$ tür. (Terimlerden derecesi en büyük olan 3 olduğundan polinomun derecesi 3 tür.)
- En büyük dereceli terim olan x^3 lü terimin önündeki -2 , polinomun baş katsayısıdır.

ÖRNEK

$$P(x) = a - 5 - x^3 + (a + 1)x^7$$

polinomunun sabit terimi 2 olduğuna göre, baş katsayısını bulalım.

NOT

$c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $P(x) = c$ polinomuna **sabit polinom** denir. Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

ÖRNEK

$$P(x) = (3 - a)x^3 - (b + 1)x + a + b + 5$$

ifadesi sabit polinom olduğuna göre, $P(100)$ ü bulalım.

NOT

$P(x) = 0$ polinomuna **sıfır polinomu** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

ÖRNEK

$$P(x) = (m - 7)x^5 + (n + 2)x^3 + m + n + k$$

polinomu sıfır polinomu olduğuna göre, k yi bulalım.

NOT

Aynı dereceli en az iki polinomun eşit dereceli terimlerinin katsayıları birbirine eşit ise bu polinomlara **eşit polinomlar** denir.

ÖRNEK

$n + 3 \neq 1$ olmak üzere,

$$P(x) = 10x + 100$$

$$Q(x) = mx^{n+3} + (k + 2)x + 40$$

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre, $m + n + k$ toplamını bulalım.

ÖRNEK

Her x gerçel sayısı için,

$$10x + 8 = ax^2 - 5ax + bx^2 + 5bx - cx^2 + c$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ yi bulalım.



x bir gerçel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

şeklinde tanımlanan $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ifadelerine **polinom fonksiyon** denir.

Buna göre, fonksiyonlardaki bütün işlemler polinomlarda da geçerlidir.

ÖRNEK

$$P(x + 3) = 2x^5 + x^2 + x + 8$$

olduğuna göre, $P(2)$ değerini bulalım.

ÖRNEK

$$P(1 - x) = x^2 + 5x + 6$$

olduğuna göre, $P(2x)$ in eşitini bulalım.

NOT

$P(x)$ polinomunun **sabit terimini** bulmak için x yerine **0** yazılır.

- $P(x)$ in sabit terimi $P(0)$ a eşittir.
- $P(2x - 1)$ in sabit terimi $P(2 \cdot 0 - 1) = P(-1)$ e eşittir.
- $P(5 - x)$ in sabit terimi $P(5 - 0) = P(5)$ e eşittir.

ÖRNEK

$$P(x + 2) = x^3 + x^2 - 5x + 6$$

olduğuna göre, $P(x)$ in sabit terimini bulalım.

NOT

$P(x)$ polinomunun **katsayılar toplamını** bulmak için x yerine **1** yazılır.

- $P(x)$ in katsayılar toplamı $P(1)$ e eşittir.
- $P(2x + 1)$ in katsayılar toplamı $P(2 \cdot 1 + 1) = P(3)$ e eşittir.
- $P(5 - x)$ in katsayılar toplamı $P(5 - 1) = P(4)$ e eşittir.

ÖRNEK

$$P(x + 1) = 3x^2 + 5x - 10$$

polinomu veriliyor.

Buna göre, $P(x - 2)$ polinomunun katsayılar toplamını bulalım.

ÖRNEK

$$P(3x + 1) = 9x^2 - 3x + c + 5$$

polinomu veriliyor.

$P(x)$ in sabit terimi 15 olduğuna göre, $P(x + 6)$ nın katsayılar toplamını bulalım.



UYARI

- $P(x)$ polinomunda **çift dereceli** terimlerin katsayıları toplamı;

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2}$$
 dir.
- $P(x)$ polinomunda **tek dereceli** terimlerin katsayıları toplamı;

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2}$$
 dir.

ÖRNEK

$$P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$$

polinomunun **çift dereceli ve tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamını** bulalım.

ÖRNEK

Gerçek katsayılı $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları veriliyor. Sabit terimi sıfırdan farklı $P(x)$ polinomu için

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x + 1)$$

eşitliği sağlanıyor.

P'nin sabit terimi Q'nun sabit teriminin iki katı olduğuna göre, R'nin katsayılarının toplamı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) 2

ÖSYM Sorusu

POLİNOMLARDA TOPLAMA

İki ya da daha fazla polinom toplanırken aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır aynı dereceli terimin katsayısı olarak yazılır.

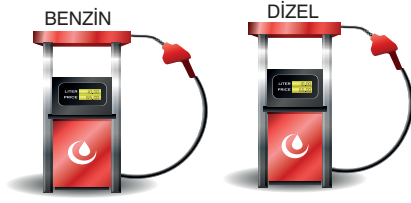
$$ax^n + bx^n + cx^n = (a + b + c)x^n$$

POLİNOMLARDA ÇIKARMA

İki polinom çıkarılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları kendi aralarında çıkarılır aynı dereceli terimin katsayısı olarak yazılır.

$$ax^n - bx^n - cx^n = (a - b - c)x^n$$

ÖRNEK



Bir benzin istasyonundaki benzin pompasında bulunan benzin miktarı $P(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4x + 5$ polinomu ile dizel pompasında bulunan benzin miktarı $Q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 4x + 10$ polinomu ile ifade ediliyor.

Dizel pompasındaki benzin miktarının benzin pompasındaki benzin miktarından ne kadar fazla olduğunu ifade eden $Q(x) - P(x)$ polinomunu bulalım.

POLİNOMLARDA ÇARPMA

İki polinom çarpılırken; birinci polinomun her terimi, ikinci polinomun her terimiyle ayrı ayrı çarpılır. Çarpımlardan elde edilen aynı dereceli terimler toplanır.

ÖRNEK

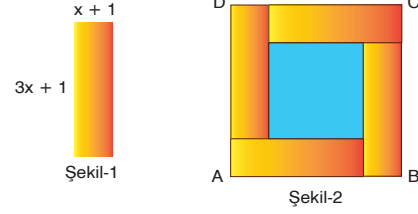
$$P(x) = x^6 - 4x^3 + 5x^2$$

$$Q(x) = 4x^5 - 2x^2 - 6x - 3$$

olduğuna göre, $P(x) \cdot Q(x)$ polinomunda x^3 lü terimin katsayısını bulalım.

ÖRNEK

Boyutları $(x + 1)$ cm ve $(3x + 1)$ cm olan Şekil-1'deki dikdörtgen bloklardan 4 tanesi uç uca konularak Şekil-2'deki ABCD karesi elde ediliyor.



İçteki mavi bölgenin alanını gösteren polinom $P(x)$ olduğuna göre, $P(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^2 + 2x + 1$ B) $4x^2$ C) $1 + 4x^2$
D) $4x^2 + 4x + 1$ E) $2x^2$

ÖRNEK

Her x gerçel sayısı için,

$$(2x - 4) = ax(x - 1) + bx(x + 1) + c(x^2 - 1)$$

olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ çarpımı kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

$$(x^2 + x - 1)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}$$

olduğuna göre, $a_1 + a_2 + \dots + a_{18}$ toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2