

KARMAŞIK SAYILAR

SANAL SAYI BİRİMİ

$i = \sqrt{-1}$ sayısına sanal sayı (imajiner sayı) birimi denir.

$$i = \sqrt{-1} \text{ ise } i^2 = -1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$x^2 + 1 = 0$$

denkleminin köklerini bulalım.

ÖRNEK

$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere, $\sqrt{-100}$ sayısının eşitini bulalım.

NOT

i sanal sayı birimi olmak üzere,

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Sıfır dışında her sayının sıfırıncı kuvveti 1 olduğundan $i^0 = 1$ dir.

i nin kuvveti 4 ten büyük ise kuvvetin 4 e bölümünden kalan alınarak işlem sonuçlandırılır.

ÖRNEK

i sanal sayı birimi olmak üzere,

$$i^{16} + i^{17} + i^{18} + i^{19}$$

işleminin eşitini bulalım.

ÖRNEK

n , tam sayı olmak üzere, i^{4n+91} in eşitini bulalım.

KARMAŞIK SAYILAR KÜMESİ

- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = a + bi$ şeklinde ifade edilen z sayısına karmaşık (kompleks) sayı denir. $\mathbb{C}$ ile gösterilir. Buna göre,
$$\mathbb{C} = \{z: z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \sqrt{-1} = i\} \text{ dir.}$$
- $z = a + bi$ karmaşık sayısında; a ya reel (gerçel) kısım, b ye imajiner (sanal) kısım denir. $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$ şeklinde gösterilir.
- $z = a + bi$ ifadesine z karmaşık sayısının standart biçimi denir.
- Her reel sayı imajiner kısmı 0 (sıfır) olan bir karmaşık sayı olduğundan karmaşık sayılar kümesi reel sayılar kümesini kapsar. Yani, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ dir.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri inceleyelim.

- $z = 7 + 2i$ karmaşık sayısı için, $\text{Re}(z) = 7$ ve $\text{İm}(z) = 2$ dir.
- $z = -5$ karmaşık sayısı $z = -5 + 0i$ biçiminde yazılabileceğinden, $\text{Re}(z) = -5$ ve $\text{İm}(z) = 0$ dir.
- $z = 8i$ karmaşık sayısı $z = 0 + 8i$ biçiminde yazılabileceğinden, $\text{Re}(z) = 0$ ve $\text{İm}(z) = 8$ dir.

NOT

Reel kısımları ve imajiner kısımları kendi aralarında eşit olan iki karmaşık sayı birbirine eşittir.

ÖRNEK

a, b birer gerçekte sayı ve i sanal sayı birimi olmak üzere,

$$-a - bi = 5i$$

olduğuna göre, a ve b yi bulalım.

NOT

z karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z}$ ile gösterilir.

$$z = a + bi \text{ ise } \bar{z} = a - bi \text{ dir.}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri inceleyelim.

- $z = 10 + 8i$ karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z} = 10 - 8i$ dir.
- $z = 5i$ karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z} = -5i$ dir.
- $z = 7$ karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z} = 7$ dir.



Karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisidir.

Yani, $\overline{(\bar{z})} = z$ dir.

$$z = a + bi \text{ ise } \bar{z} = a - bi$$

$$\overline{(\bar{z})} = a + bi \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\overline{(\bar{z})} = -7 - 8i$ olduğuna göre, $\text{İm}(z)$ yi bulalım.

ÖRNEK

$$x^2 - x + 1 = 0$$

denkleminin köklerini bulalım.

NOT

Reel katsayılı, $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri $m + ni$ karmaşık sayısı ise diğeri bu kökün eşleniği olan $m - ni$ sayıdır.

NOT

- Karmaşık sayılar arasında **toplama veya çıkarma işlemi** yapılırken, reel ve sanal kısımlar kendi aralarında toplanır veya çıkarılır.
- Karmaşık sayılar arasında **çarpma işlemi** yapılırken dağılıma özelliği kullanılarak her terim birbiriyle çarpılır.
- Karmaşık sayılarda **bölme işlemi** yapılırken, paydanın eşleniği ile kesir genişletilir.

ÖRNEK

$$z_1 = 100 - 25i$$

$$z_2 = 200 + 50i$$

olduğuna göre, $z_1 + z_2$ ve $z_1 - z_2$ işlemlerini yapalım.

ÖRNEK

$$(2 + i)(3 + i)(1 + i^{11})(1 + i^{21})$$

işleminin sonucunu bulalım.

ÖRNEK

$$\frac{5 + i}{1 - i}$$

işleminin sonucunu bulalım.

ÖRNEK

i sanal birim olmak üzere,

$$x^2 - 8i \cdot x - 15 = 0$$

denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2 - 5i$

B) $2 - 3i$

C) $-3i$

D) $2 + 3i$

E) $5i$

ÖRNEK

$z = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8$ sayısının çarpma işlemine göre tersini bulalım.

ÖRNEK

$i^2 = -1$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\frac{i^{13n+10}}{i^{n+6} + i^{5n+7}}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

ÖRNEK

a bir gerçel sayı olmak üzere, karmaşık sayılarda

$$\frac{1 - ai}{a - i} = i$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, a kaçtır?

A) 4

B) 3

C) 2

D) 1

E) 0

ÖSYM Sorusu - 2018

ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{20}$$

sayısının aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-2i$ B) $-i$ C) -1 D) 1 E) $2i$

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

Karmaşık sayılar kümesinde

$$\frac{(4-2i) \cdot (6+3i)}{(1-i) \cdot (1+i)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6

ÖSYM Sorusu (2019 AYT)

ÖRNEK

i sanal sayı birimi olmak üzere,

$$z = 1 + \sqrt{-4} + \sqrt{-9}$$

olduğuna göre, $\text{Im}(z)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÖRNEK

i sanal sayı birimi olmak üzere,

$$z = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}$$

çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -6 B) $-6i$ C) $-2i$ D) $4i$ E) $6i$