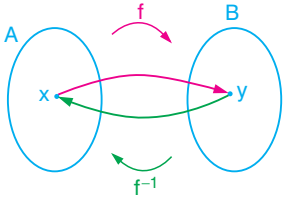


BİR FONKSİYONUN TERSİ

BİR FONKSİYONUN TERSİ

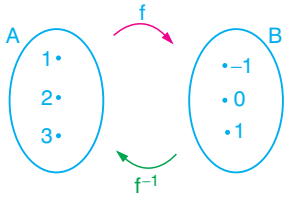
$f: A \rightarrow B$, $f = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ **bire bir ve örten** bir fonksiyon olmak üzere, $f^{-1}: B \rightarrow A$, $f^{-1} = \{(y, x) : y \in B, x \in A\}$ fonksiyonuna f 'nin ters fonksiyonu denir ve f^{-1} ile gösterilir.



$f: A \rightarrow B$, $f(x) = y$ ise

$f^{-1}: B \rightarrow A$, $f^{-1}(y) = x$ olur.

ÖRNEK



$f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonunun iki elemanı $(1, 1)$ ve $(3, -1)$ dir.

f fonksiyonunun tersi de bir fonksiyon olduğuna göre, f^{-1} in elemanlarını bulalım.

ÖRNEK

$f(x)$ doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$$f^{-1}(2) = 3$$

$$f^{-1}(4) = 7$$

olduğuna göre, $f(5)$ kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

ÖRNEK

$$f(2x-5) = 3x+1$$

olduğuna göre, $f(-1) + f^{-1}(10)$ toplamı kaçtır?

NOT

$f(x) = y$ fonksiyonunun tersini bulmak için, $f(x) = y$ eşitliğinde x in y türünden ifadesi bulunur. $f^{-1}(y) = x$ eşitliğinde yerine yazılır.

Fonksiyonlar genellikle x ile ifade edildiğinden, elde edilen eşitlikte, y 'lerin yerine x yazılır.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ 'i bulalım.

NOT

Gerçek sayılarda tanımlı doğrusal fonksiyonlar bire bir ve örtendir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun ters fonksiyonu

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \quad (a \neq 0) \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{5}$$

fonksiyonunun tersini bulalım.

NOT

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ fonksiyonunun ters fonksiyonu } f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

dir. a ve d sayıları hem yer hem de işaret değiştirir.

Bu fonksiyonların tanım ve değer kümeleri

$$f: \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}, f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$$

fonksiyonunun tersini bulalım.

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} - \{b\}$$

f 1-1 ve örtendir.

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} \quad \text{ise } a.b \text{ kaçtır?}$$

ÖRNEK

$$f(2x-3) = 3x+1 \quad \text{ise } f(x) = ?$$

ÖRNEK

$$f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = \frac{1}{x} \quad \text{ise } f(x) = ?$$

ÖRNEK

$$f(x^2-3x) = 2x^2-6x+7 \quad \text{ise } f(x) = ?$$

ÖRNEK

$$f\left(x - \frac{2}{x}\right) = x^2 + \frac{4}{x^2} + 1 \quad \text{ise } f(x) = ?$$

ÖRNEK

$$f : [-1, \infty) \rightarrow [-1, \infty), f(x) = x^2 + 2x$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{x-1}-1$ B) $\sqrt{x+1}-1$ C) $\sqrt{x-1}+1$
D) $\sqrt{x}-2$ E) $x-\sqrt{2x}$

ÖRNEK

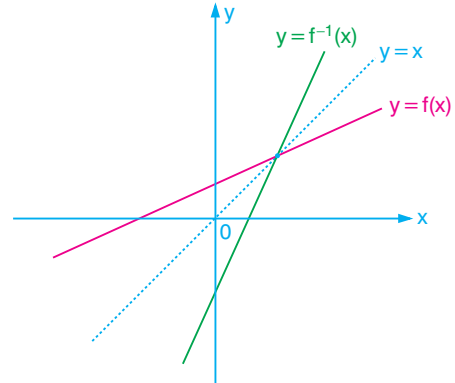
Tanımlı olduğu değerleri için,

$$x = \frac{2f(x)+3}{1-f(x)}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(3)$ kaçtır?

- A) $-\frac{6}{5}$ B) -3 C) $-\frac{7}{2}$ D) $-\frac{9}{2}$ E) -5

BİR FONKSİYON İLE TERSİNİN GRAFİĞİ

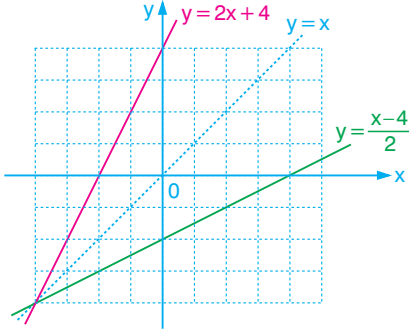


Yukarıdaki şekilden de anlaşılacağı üzere,

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonunun ve ters fonksiyonunun grafiğini çizelim.



$f(x) = 2x + 4$ ise
 $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$ olur.
 $(0, 4) \in f$ ise $(4, 0) \in f^{-1}$
 $(-2, 0) \in f$ ise $(0, -2) \in f^{-1}$
dir.

f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik.