

KÜMELER

KÜME KAVRAMI

İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesneler topluluğuna **küme** denir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin veya sembollerin her birine **kümenin elemanları** adı verilir.

Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir.

ÖRNEK

- a. Yılın bazı ayları
- b. 5 ten küçük asal sayılar
- c. Sivas iline komşu iller

Yukarıdaki ifadelerin bir küme olup olmadığını belirleyelim.

KÜMELERİN FARKLI GÖSTERİMLERİ

Kümeler, genel olarak üç farklı yolla gösterilir:

Liste Yöntemi ile Gösterim

Kümeyi oluşturan tüm elemanlar, küme parantezi olarak bilinen {} parantezinin içerisinde aralarına virgül konularak gösterilir.

Bu gösterimde; her eleman yalnızca bir kez yazılır ve elemanların yer değiştirmesiyle küme değişmez.

ÖRNEK

“MALATYA” kelimesinin harflerini liste yöntemi ile yazalım.

Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterim

Kümeyle ait her elemanın sağladığı özellik yazılarak yapılan gösterim biçimidir.

A kümesi için $A = \{x \mid x \text{ in özelliği}\}$ biçiminde ifade edilir. Burada “|” sembolü “öyle ki” anlamına gelir. “|” sembolü yerine “:” sembolü de kullanılabilir.

ÖRNEK



Golf sahasında bir golfçünün her atışında golf topu, aralarında belirli mesafeler olan çukurlara girmektedir. İlk atışında golf topu 5 m uzaklıktaki çukura, 2. atışta 7 metre uzaklıktaki çukura girmiştir.

Golfçü çukurların aşağıdaki kümenin elemanları olacak şekilde sıralandığını hesaplamıştır.

$$A = \{x \mid 3 < x < 17, x = 2k + 1, k \text{ tam sayı}\}$$

Buna göre, golf topunun girdiği kaç farklı çukur vardır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

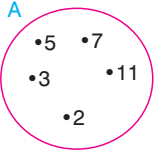
Venn Şeması Yöntemi ile Gösterim

Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri veya bir çokgen içerisine yanlarına birer nokta konularak yazılmasıyla yapılan gösterimdir.

ÖRNEK

$A = \{x \mid x < 5, x \text{ doğal sayı}\}$ kümesini Venn şeması yöntemiyle gösterelim.

ÖRNEK



Venn şemasıyla verilen A kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ B) $A = \{x \mid x \text{ asal sayı, } x < 12\}$
 C) $s(A) = 5$ D) $A = \{x \mid 2 < x < 11, x \text{ doğal sayı}\}$
 E) $9 \notin A$

SONLU KÜME, SONSUZ KÜME

Eleman sayıları bir doğal sayı ile gösterilebilen kümelere **sonlu küme** denir.

Sonlu olmayan kümeler ise **sonsuz küme** adı verilir.

ÖRNEK

- a. $A = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$
 b. $B = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$
 c. $C = \{x \mid 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$

kümelerinden hangileri sonlu ya da sonsuz kümedir?

BOŞ KÜME

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme $\emptyset$ veya $\{\}$ sembolleri ile gösterilir. Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.



$\{\emptyset\}$, $\{\{\}\}$ kümeleri, birer elemanlı kümeler olduğu için boş küme değildir.

$A = \{\{a\}, \{b\}, c\}$ kümesi 3 elemanlı bir kümedir.

ÖRNEK

$A = \{x \mid -2 < x < 7, x \text{ doğal sayı}\}$

$B = \{x \mid x > 2, x \text{ asal sayı}\}$

$C = \{x \mid x, \text{ karesi 5 olan tam sayı}\}$

kümeleriyle ilgili aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

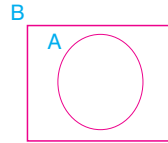
- A) $s(A) = 7$ dir. B) B sonsuz kümedir.
 C) C boş kümedir. D) $-1 \in A$
 E) $-5 \notin A$

EVRENSEL KÜME

Üzerinde işlem yapılan, tüm kümeleri içinde bulunduracak şekilde seçilen kümeye **evrensel küme** adı verilir. Evrensel küme E ile gösterilir.

ALT KÜME

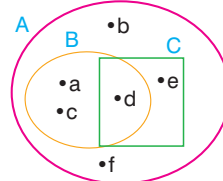
A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir, denir ve $A \subset B$ veya $A \subseteq B$ ile gösterilir. Bu durum Venn şemasında aşağıdaki gibi gösterilir.



A kümesinin B kümesinden farklı en az bir elemanı varsa, A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir ve $A \not\subset B$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

A, B ve C kümeleri aşağıdaki Venn şemasında gösterilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $B \subset A$ B) $C \not\subset B$ C) $s(C) = 2$
 D) $s(B) = 4$ E) $C \subset A$

ALT KÜMENİN ÖZELLİKLERİ

- Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\emptyset \subseteq A$ dir.
- Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subseteq A$ dir.
- A, B ve C kümeleri için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir.

ÖRNEK

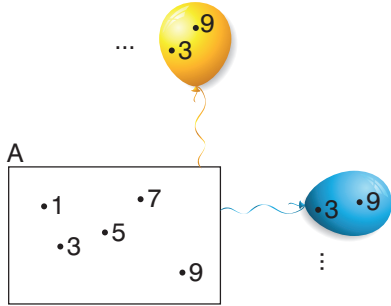
$A = \{x, y, z\}$ kümesinin alt kümelerini yazalım.

NOT

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n dir.
Bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.

ÖRNEK

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin elemanları aşağıdaki Venn şemasında gösterilmiştir. Kümenin elemanlarının yazılı olduğu dikdörtgenin etrafına 3 ve 9 elemanlarının birlikte bulunduğu balonlar asılıyor.



Buna göre, dikdörtgenin etrafına en çok kaç tane balon asılır?

- A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

ÖRNEK

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesinin 2 elemanlı tüm alt kümeleri yazılıyor. Bu alt kümelerin her birinin elemanları toplamı ayrı ayrı hesaplanıyor ve bu sayılarla B kümesi oluşturuluyor.

Buna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

ÖSYM Sorusu

İKİ KÜMENİN EŞİTLİĞİ

A ve B kümelerinin tüm elemanları aynı ise bu kümelere birbirine eşit kümeler denir. Bu durum $A = B$ şeklinde gösterilir.

A ve B kümelerinin birbirinden farklı en az bir elemanı varsa A ile B eşit olmayan kümelerdir denir ve bu durum $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

m ve n tam sayılar olmak üzere,

$$A = \{x \mid (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0, x \text{ tam sayı}\}$$

$$B = \{-1, m, n, m + 2\}$$

kümeleri veriliyor.

A = B olduğuna göre, $m \cdot n$ çarpımı kaçtır?

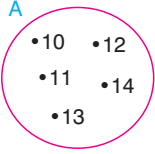
ÖRNEK

Bir A kümesi için $x \in A$ ve $y \in A$ dir.

A kümesinin alt kümelerinin 24 tanesinde x veya y elemanları bulunduğu göre, $s(A)$ kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

ÖRNEK



Yukarıda Venn şemasıyla verilen A kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $A = \{10, 11, 12, 13, 14\}$ B) $s(A) = 5$
 C) $\{10, 11, 12\} \in A$ D) $15 \notin A$
 E) $A = \{x \mid x < 15, x \text{ iki basamaklı doğal sayı}\}$

ÖRNEK

Bir kümenin eleman sayısı o kümenin bir elemanı ise bu kümeye “gizemli küme” denir.

Örneğin; $K = \{3, 4, 5\}$ bir gizemli kümedir.

Buna göre, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinden kaç tanesi gizemli kümedir?

- A) 16 B) 24 C) 32 D) 40 E) 48

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümeleri veriliyor.

$A \neq C \neq B$ olmak üzere, $A \subseteq C \subseteq B$ koşulunu sağlayan kaç farklı C kümesi yazılabilir?

- A) 6 B) 10 C) 12 D) 14 E) 24

KÜMELERDE İŞLEMLER

Kümelerde kesişim, birleşim, fark ve tümlleme işlemlerini öğrenelim.

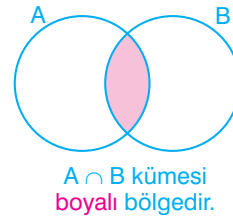
KÜMELERDE KESİŞİM İŞLEMİ

A ile B iki küme olsun. A ile B kümelerinin ortak elemanlarının alınması ile oluşturulan kümeye, A ve B kümelerinin **kesişim kümesi** denir. A ve B kümelerinin kesişimi $A \cap B$ şeklinde gösterilir.

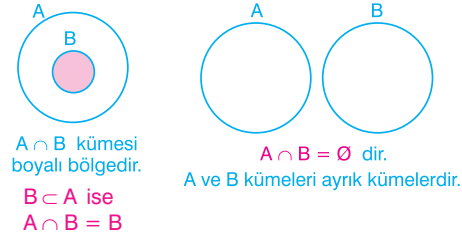
A ve B kümelerinin kesişim kümesi ortak özellik yöntemiyle

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde gösterilir.

$A \cap B$ kümesinin Venn şemasıyla gösterimi aşağıdaki gibidir.

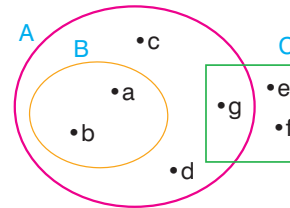


$A \cap B$ kümesi Venn şemasıyla aşağıdakiler gibi de olabilir.



ÖRNEK

A, B ve C kümesi aşağıdaki Venn şemasında gösterilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $A \cap B = B$ B) $B \cap C = \emptyset$ C) $s(C) = 3$
 D) $A \cap C = \{g\}$ E) $s(A) = 7$

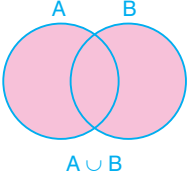
KÜMELERDE BİRLEŞİM İŞLEMİ

A ile B iki küme olsun. A ile B kümelerinin tüm elemanlarının alınması ile oluşturulan kümeye, A ve B kümelerinin **birleşim kümesi** denir. A ve B kümelerinin birleşimi $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

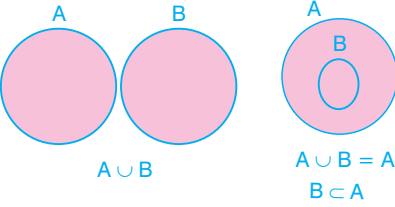
A ve B kümelerinin birleşim kümesi ortak özellik yöntemiyle

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$ şeklinde gösterilir.

$A \cup B$ kümesinin Venn şemasıyla gösterimi aşağıdaki gibidir.



$A \cup B$ kümesinin Venn şemasıyla gösterimi aşağıdakiler gibi de olabilir.



ÖRNEK

$$A = \{x \mid x^2 < 5, x \text{ tam sayı}\}$$

$$B = \{x \mid -1 < x < 2, x \text{ tam sayı}\}$$

kümeleri için $A \cup B$ kümesini yazalım.

KESİŞİM VE BİRLEŞİM İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

- $A \cap A = A$ dir. $A \cup A = A$ dir.
- $A \cap B = B \cap A$ dir. $A \cup B = B \cup A$ dir.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ dir. $A \cup \emptyset = A$ dir.
- $A \subseteq B$ ise; $A \cap B = A$ dir. $A \cup B = B$ dir.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (kesişimin birleşme özelliği)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birleşimin birleşme özelliği)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliği)

ÖRNEK

$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup C = \{-2, -1, 1, 2, 5\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $A \cup (B \cap C)$ kümesini bulalım.



A ve B kümeleri için

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ dir.}$$

A ve B ayrık kümeler ise $A \cap B = \emptyset$ dir. Bu durumda

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$s(A) = 2s(B)$$

$$s(A \cup B) = 12$$

$$s(A \cap B) = 3$$

olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

NOT

A, B ve C kümeleri için

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

KÜMELERDE FARK İŞLEMİ

A ve B iki küme olsun. A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A fark B** kümesi adı verilir. $A - B$ veya $A \setminus B$ şeklinde gösterilir.

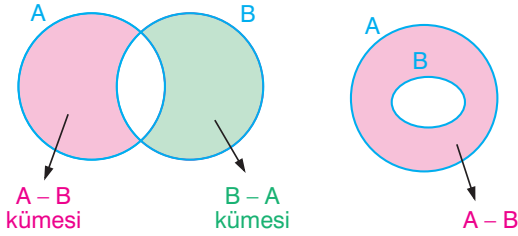
$A \setminus B$ kümesi ortak özellik yöntemiyle

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ şeklinde gösterilir.

$B \setminus A$ kümesi ortak özellik yöntemiyle

$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$ şeklinde gösterilir.

$A \setminus B$ kümesinin Venn şemasıyla gösterimi aşağıdaki gibidir.



ÖRNEK

$A = \{x \mid -2 < x < 3, x \text{ tam sayı}\}$ ve $B = \{x \mid -4 < x < 1, x \text{ tam sayı}\}$ kümeleri için $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini yazalım.

FARK İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

- $A \neq B$ iken $A \setminus B \neq B \setminus A$ dir. (Fark işleminin değişme özelliği yoktur.)
- $A \setminus A = \emptyset$ dir.
- E, evrensel küme ve $A \subset E$ olmak üzere, $A \setminus E = \emptyset$ dir.
- $A \setminus \emptyset = A$ dir.



$A \cap B = \emptyset$ olmak üzere,

- $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ dir.

ÖRNEK

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için,

$$s(A) = 2 \quad s(A \cap B) = 3 \quad s(B \setminus A)$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $s(A) + s(B)$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

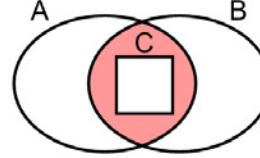
- A) 13 B) 15 C) 16 D) 20 E) 22

ÖRNEK

Aşağıdaki Venn şemasında

- 2 ile kalansız bölünebilen tam sayılar kümesi A,
- 3 ile kalansız bölünebilen tam sayılar kümesi B,
- 12 ile kalansız bölünebilen tam sayılar kümesi C

ile gösterilmektedir.



Buna göre,

- I. 18
II. 24
III. 42

sayılarından hangileri boyalı bölge ile gösterilen kümenin bir elemanıdır?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

ÖSYM Sorusu (2019 TYT)

ÖRNEK

$$A = \{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq 100; n, 3\text{'e tam bölünür.} \}$$

$$B = \{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq 100; n, 5\text{'e tam bölünür.} \}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $A \setminus B$ fark kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 33 B) 32 C) 30 D) 28 E) 27

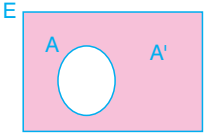
ÖSYM Sorusu

BİR KÜMENİN TÜMLEYENİ

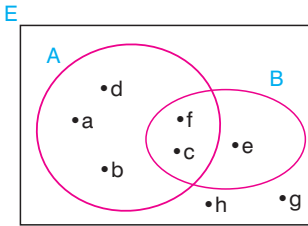
E evrensel küme $A \subseteq E$ olmak üzere, evrensel kümede olup da A da olmayan elemanların kümesine **A kümesinin tümleyeni** denir ve A' şeklinde gösterilir.

A' kümesi ortak özellik yöntemiyle $A' = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$ şeklinde gösterilir.

A' kümesinin Venn şemasıyla gösterimi aşağıdaki gibi olur.



ÖRNEK



A ve B kümeleri, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere, aşağıdakileri bulalım.

- A'
- B'
- $A \cap B'$
- $s(A) + s(A')$

TÜMLEMENİN ÖZELLİKLERİ

E, evrensel küme olmak üzere,

- $(A')' = A$
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = E$ dir.
- $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$ dir.
- $E \setminus A = A'$ ve $A \setminus E = \emptyset$ dir.

NOT

A ve B kümeleri için

- $s(E) = s(A) + s(A')$
- $s(A \setminus B) = s(A \cap B')$ ve $s(B \setminus A) = s(B \cap A')$ olur.
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan Kuralları)
- $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$

ÖRNEK

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere,

$$s(A) + s(B') = 12$$

$$s(B) + s(A') = 6$$

$$s(A) = 2s(B')$$

olduğuna göre, $s(A) + s(B)$ toplamı kaçtır?

- A) 14 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

ÖRNEK

Bir sınıftaki tüm öğrenciler E kümesi ile gösterilmek üzere,

$$M = \{\text{sınıftaki kız öğrenciler}\}$$

$$N = \{\text{gözlüklü öğrenciler}\}$$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, $(N \setminus M)' \cap (M \cap N)'$ kümesi aşağıdakilerden hangisini ifade eder?

- A) Gözlüklü erkek öğrenciler
- B) Kız öğrenciler
- C) Gözlüksüz kız öğrenciler
- D) Gözlüksüz öğrenciler
- E) Gözlüklü öğrenciler

ÖRNEK

A ve B kümeleri için,

$$s(A \setminus B) = 9$$

$$s(B \setminus A) = 7$$

$$s(A \cup B) = 22$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

- A) 16
- B) 32
- C) 64
- D) 80
- E) 100

ÖRNEK

$$s(A) = 2s(B)$$

$$s(A \cap B) = 3$$

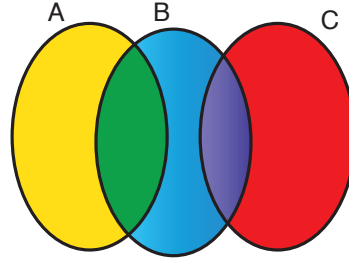
$$s(A \cup B) = 18$$

olduğuna göre, $s(A - B)$ kaçtır?

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 11
- E) 12

ÖRNEK

Şekilde A, B ve C kümeleri gösterilmiştir.



Buna göre,

$$I. (A \setminus B) \cup (B \cup C)$$

$$II. (A \cap B) \cup C$$

$$III. (A \cup B) \setminus C$$

kümelerinden hangisi üç renk ile gösterilmiştir?

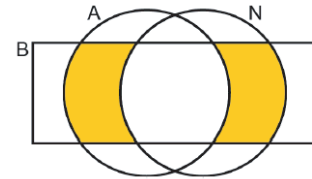
- A) Yalnız I
- B) Yalnız III
- C) I ve II
- D) I ve III
- E) II ve III

ÖRNEK

Aşağıdaki Venn şemasında

- A harfi ile başlayan isimler kümesi A,
- N harfi ile biten isimler kümesi N,
- 5 harfli isimler kümesi B

ile gösterilmiştir.



Buna göre,

$$K = \{\text{AÇELYA, AHMET, AYSUN, BEREN, KENAN, NERMİN}\}$$

kümesinin elemanlarından kaç tanesi şekildeki boyalı bölgeler ile gösterilen kümenin elemanıdır?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

ÖSYM Sorusu