

MANTIK

ÖNERMELER

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren cümlelere **önerme** denir. Matematikte önermeleri; p, q, r, s, t,... gibi küçük harflerle gösteririz.

ÖRNEK

p : “ $-3 < 2$ ”

q : “Ders çalıştın mı?”

r : “1 asal sayıdır.”

ifadelerinin önerme olup olmadığını belirleyelim.

ÖRNEK

Aşağıdakilerden hangisi bir önerme değildir?

- A) “ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 10$ ”
- B) “Ne zaman yola çıkıyoruz?”
- C) “ $|2 - 5| = |5 - 2|$ ”
- D) “5 ten küçük 4 tane pozitif tam sayı vardır.”
- E) Bir atasözümüz “Bugünün işini yarına bırakma” şeklindedir.



Genel olarak önermeler, her yerde, her zaman ve herkes için doğru ya da yanlış olan ve bir yargı içeren cümlelerdir.

Emir, soru anlamları içeren, eksik ve anlaşılmayan ifadeler kişiden kişiye değişir ve önerme kabul edilmezler.

ÖNERMENİN DOĞRULUK DEĞERİ

Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına o önermenin **doğruluk değeri** denir.

Bir önerme doğru ise doğruluk değeri **D veya 1** ile yanlış ise **Y veya 0** ile gösterilir.

Bir p önermesi;

doğru önerme olduğunda **p $\equiv$ 1** şeklinde gösterilir ve “p önermesi 1 e denktir” şeklinde okunur.

yanlış önerme olduğunda **p $\equiv$ 0** şeklinde gösterilir ve “p önermesi 0 a denktir” şeklinde okunur.

ÖRNEK

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

p : “ $(-3)^2 < 9$ ”

q : “15 asal sayıdır.”

r : “En büyük negatif tam sayı -1 dir.”

DOĞRULUK TABLOSU

Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

ÖRNEK

p

p önermesi için doğruluk tablosu oluşturalım.

ÖRNEK

p	q

p ve q önermeleri için doğruluk tablosu oluşturalım.

NOT

p, q ve r önermelerinin birbirine göre $2^3 = 8$ farklı doğruluk durumu;
p, q, r ve s önermelerinin birbirine göre $2^4 = 16$ farklı doğruluk durumu vardır.

Bu şekilde genelleme yapılırsa,

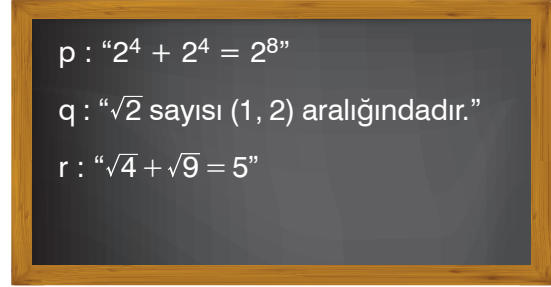
n farklı önermenin birbirine göre, 2^n tane doğruluk durumu vardır.

ÖNERMELERİN DENKLİĞİ

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye **denk önermeler** denir.
p önermesi q önermesine denk ise $p \equiv q$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

Matematik Öğretmeni Ekrem Bey, tahtaya aşağıdaki önermeleri yazmıştır.



Buna göre, yazılan önermelerden denk olanlarını bulalım.

BİR ÖNERMENİN DEĞİLİ (OLUMSUZU)

Bir önermenin hükmünün değiştirilmesiyle elde edilen yeni önermeye bu önermenin değili (olumsuzu) denir. p önermesinin değili p' veya $\sim p$ ile gösterilir.

p önermesinin doğruluk değeri 1 ise p' önermesinin doğruluk değeri 0'dır.

Sembolik mantık dilinde gösterirsek;

$p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$ dir. $p \equiv 0$ ise $p' \equiv 1$ dir.

Aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

p	p'
1	0
0	1

NOT

Bir önermenin değilinin değili yine kendisidir.

Bir p önermesi için $(p')' \equiv p$ dir.

Ayrıca; $1' \equiv 0$ ve $0' \equiv 1$ dir.

ÖRNEK

p: "2 asal sayıdır."

q: " $2 + 2 + 2 + 2 = 2^3$ "

r: "Adana, Ankara ile komşu değildir."

önergelerinin değillerini bulalım.

UYARI

Bir önermenin değilini yazarken aşağıdaki semboller dönüştürülür.

p	p'
=	≠
≠	=
<	≥
>	≤
≥	<
≤	>

ÖRNEK

p: " $-2 > -3$ " önermesinin değilini yazalım.

BİLEŞİK ÖNERMELER

İki veya daha fazla önermenin "ve", "veya", "ya da", "ise", "ancak ve ancak" gibi bağlaçlarla birbirine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

"Kazım ders çalıştı **ve** başarılı oldu."

" $2 + 3 = 5$ **veya** $4 < 7$ "

"Ayla okula gelmedi **ya da** Ayla hasta oldu."

"Bugün pazar **ise** yarın pazartesi."

" $x = 0$ **ancak ve ancak** $x^2 = 0$ "

ifadeleri birer bileşik önermedir.

VE BAĞLACI İLE KURULAN BİLEŞİK ÖNERMELER

p ile q önermelerinin "ve", bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, p ve q bileşik önermesi denir ve $p \wedge q$ biçiminde gösterilir.

p: "Dünya bir gezegendir."

q: "Ay, Dünya'nın uydusudur." önermeleri ve bağlacı ile bağlanırsa
"Dünya bir gezegendir ve Ay, Dünya'nın uydusudur." bileşik önermesi elde edilir.

$p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p ile q önermelerinin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda ise yanlıştır.

$p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ÖRNEK

p: "İki basamaklı en küçük asal sayı 11 dir."

q: " $1 + 2 + 3 + 4 > 11$ "

önergeleri için $p \wedge q$ önermesinin doğruluk değeri bulalım.

ÖRNEK

$$p \wedge q' \equiv 1$$

olduğuna göre, p ile q önermelerinin doğruluk değeri bulalım.

VE BAĞLACININ ÖZELLİKLERİ

- Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ dir. (Tek kuvvet özelliği)
- Her p, q önermesi için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ dir. (Değişme özelliği)
- Her p, q, r önermesi için $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ dir. (Birleşme özelliği)

NOT

Her p önermesi için aşağıdaki denklıklar sağlanır.

- $p \wedge p' \equiv 0$
- $p \wedge 1 \equiv p$
- $p \wedge 0 \equiv 0$

Bu özdeşlikler doğruluk tablosu yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

VEYA BAĞLACI İLE KURULAN BİLEŞİK ÖNERMELER

p ile q önermelerinin "veya", bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, p veya q bileşik önermesi denir ve $p \vee q$ biçiminde gösterilir.

p: "Elma bir meyvedir."

q: "Domates bir meyvedir."önergeleri veya bağlacı ile bağlanırsa

"Elma bir meyvedir veya domates bir meyvedir." bileşik önermesi elde edilir.

$p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p ile q önermelerinden en az biri doğru iken doğru, her ikisi de yanlış iken yanlıştır.

$p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ÖRNEK

$$p' \vee q \equiv 0$$

olduğuna göre, $p' \wedge q$ önermesinin doğruluk değeri aşağıdakilerden hangine denktir?

A) $p \vee q'$

B) $p \vee q$

C) $p \wedge q$

D) $p \wedge q'$

E) $p' \vee q'$

VEYA BAĞLACININ ÖZELLİKLERİ

- Her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ dir. (Tek kuvvet özelliği)
- Her p, q önermesi için $p \vee q \equiv q \vee p$ dir. (Değişme özelliği)
- Her p, q, r önermesi için $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dir. (Birleşme özelliği)
- Her p, q, r önermesi için;
 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ dir. (ve nin veya üzerine dağılma özelliği)
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ dir. (veya nın ve üzerine dağılma özelliği)

ÖRNEK

$$(p \vee q') \wedge (p \vee q)$$

bileşik önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) p B) q' C) p' D) 0 E) 1

NOT

Her p önermesi için aşağıdaki denklikler sağlanır.

- $p \vee p' \equiv 1$
- $p \vee 1 \equiv 1$
- $p \vee 0 \equiv p$

Bu özdeşlikler doğruluk tablosu yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

ÖRNEK

$$(q \vee 0) \wedge (p \vee q')$$

bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

DE MORGAN KURALLARI

Her p, q önermesi için

- $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ (p veya q nun değili)
- $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ (p ve q nun değili)

ÖRNEK

$$(p' \vee q)'$$

bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

YA DA BAĞLACI İLE OLUŞAN BİLEŞİK ÖNERMELER

p ile q önermelerinin “ya da” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, p ya da q bileşik önermesi denir ve $p \vee q$ biçiminde gösterilir.

$p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p ile q önermelerinden yalnız biri doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır. $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

NOT

Her p önermesi için aşağıdaki denklikler sağlanır.

- $p \vee p \equiv 0$
- $p \vee p' \equiv 1$
- $p \vee 1 \equiv p'$
- $p \vee 0 \equiv p$

Bu özdeşlikler doğruluk tablosu yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

ÖRNEK

$$(p' \vee p)' \vee (p \vee 0)$$

bileşik önermesini en sade biçimde yazalım.

İSE BAĞLACI İLE KURULAN BİLEŞİK ÖNERMELER

p ile q önermelerinin “ise” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **koşullu önerme** denir ve $p \Rightarrow q$ biçiminde gösterilir.

İSE BAĞLACININ DOĞRULUK TABLOSU

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p doğru, q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



İse bağlacıyla oluşturulan $p \Rightarrow q$ önermesinde; ikinci bileşen yanlış birinci bileşen doğru olduğunda yanlış olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK

$$p' \Rightarrow q \equiv 0$$

olduğuna göre, $(p' \Rightarrow q) \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

ÖRNEK

$$p: a = 0$$

$$q: a + b = 0$$

$$r: a \cdot b = 0$$

önergeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki koşullu önermelerden hangisi doğrudur?

A) $r \Rightarrow p$

B) $p \Rightarrow r$

C) $q \Rightarrow p$

D) $p \Rightarrow q$

E) $q \Rightarrow r$

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

$$p: \sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$$

$$q: \sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{2}$$

$$r: \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

önergeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki bileşik önermelerden hangisi doğrudur?

A) $p \wedge (r \vee q)$

B) $(p \vee q) \wedge r$

C) $r \Rightarrow (p \vee q)$

D) $p \vee (r \Rightarrow q)$

E) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

denkliğini doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	p'	p' $\vee$ q	p $\Rightarrow$ q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1



Sembolik mantıkta "ise" bağlacını içeren sadeleştirme problemleri çözümlürken $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ denkliği ayrı bir önem taşır.

İSE BAĞLACI DENKLİKLERİ

Her p önermesi için;

- $p \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 1 \equiv 1$
- $p \Rightarrow 0 \equiv p'$
- $p \Rightarrow p' \equiv p'$
- $1 \Rightarrow p \equiv p$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p' \Rightarrow p \equiv p$

ÖRNEK

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q'$$

koşullu önermesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) p B) q C) 1 D) q' E) 0

ÖNERMENİN KARŞITI, TERSİ, KARŞIT TERSİ

p ve q önermeleri için;

- $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı: $q \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi: $p' \Rightarrow q'$
- $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi: $q' \Rightarrow p'$

ÖRNEK

"Dengeli beslenirsen sağlıklı olursun."

koşullu önermesini karşıtını, tersini ve karşıt tersini yazalım.

Karşıtı: "Sağlıklı olursan dengeli beslenirsin."

Tersi: "Dengeli beslenmezsen sağlıklı olmazsın."

Karşıt tersi: "Sağlıklı olmazsan dengeli beslenmezsin."

NOT

- $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi, karşıt tersi olan $q' \Rightarrow p'$ koşullu önermesine denktir. Diğer bir ifadeyle; $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olur.

NOT

- $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin değini (olumsuzu) $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ olur.

ÖRNEK

$$(x = 2) \Rightarrow (x^2 + 1 \neq 5)$$

koşullu önermesinin değini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x \neq 2) \vee (x^2 + 1 = 5)$
 B) $(x^2 + 1 \neq 5) \wedge (x = 2)$
 C) $(x \neq 2) \vee (x^2 + 1 \neq 5)$
 D) $(x^2 + 1 \neq 5) \wedge (x \neq 2)$
 E) $(x = 2) \wedge (x^2 + 1 = 5)$

ANCAK VE ANCAK BAĞLACI İLE KURULAN BİLEŞİK ÖNERMELER

p ile q önermelerinin “ancak ve ancak” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, p ancak ve ancak q bileşik önermesi denir ve $p \Leftrightarrow q$ biçiminde gösterilir.

$p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p ile q önermelerinin doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

$p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ÖRNEK

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

denkliğini doğruluk tablosu ile gösterelim.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1



ANCAK VE ANCAK BAĞLACININ ÖZELLİKLERİ

Her p, q önermesi için;

- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ dir. (Değişme özelliği)
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$
- $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$ ($p \Leftrightarrow q$ nun değili)

AÇIK ÖNERME, AÇIK ÖNERMENİN DOĞRULUK KÜMESİ

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlerin aldığı değerlerle kesin olarak doğru ya da yanlış yargı bildiren önermelere **açık önerme** denir.

Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine, o açık önermenin **doğruluk kümesi** denir.

x değişken olmak üzere, içerisinde x değişkeni gibi tek değişken bulunduran bir açık önerme $p(x)$, $q(x)$, ... biçiminde gösterilir.

x ve y değişkenler olmak üzere, iki değişken bulunduran bir açık önerme ise $p(x,y)$, $q(x,y)$, ... biçiminde gösterilir.

Bir m sayısı $p(x)$ açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı ise $p(m) \equiv 1$ dir.

Bir n sayısı $p(x)$ açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı değilse $p(n) \equiv 0$ dir.

ÖRNEK

$p(x)$: “x tam sayı, $2x + 3 = 1$ ” açık önermesi veriliyor.

- Doğruluk kümesini bulalım.
- $p(-1)$, $p(3)$ önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

EVRENSEL NİCELEYİCİ, VARLIKSAL NİCELEYİCİ

Önüne geldiği elemanların niceliğini (çokluğunu) belirten, “her” ve “bazı” sözcüklerine **niceleyici** denir.

Bazı niceleyicisi önüne geldiği elemanların en az birini ifade ettiğinden bu niceleyiciye **varlıksal niceleyici** denir ve $\exists$ sembolü ile gösterilir.

Her niceleyicisi önüne geldiği elemanların tamamını ifade ettiğinden bu niceleyiciye **evrensel niceleyici** denir ve $\forall$ sembolü ile gösterilir.

ÖRNEK

I. “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 1$ ”

II. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$ ”

III. “ $\exists x \in \mathbb{N}, 3x + 4 = 9$ ”

bileşik önermelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) I ve II

D) I ve III

E) II ve III

ÖRNEK

Sembolik mantık dilinde “ $\exists x \in \mathbb{N}, x \leq 0$ ”

biçiminde ifade edilen önermenin sözel dilde ifadesi aşağıdakilere hangisidir?

A) “Bazı doğal sayılar sıfırdan büyüktür.”

B) “Her doğal sayı sıfırdan büyüktür.”

C) “Bazı doğal sayılar sıfırdan büyük veya eşittir.”

D) “Bazı doğal sayılar sıfırdan küçük veya eşittir.”

E) “Her doğal sayı sıfırdan küçük veya eşittir.”

AÇIK ÖNERMENİN DEĞİLİ (OLUMSUZU)

Bazı niceleyicisinin olumsuzu **her** niceleyicisi, **her** niceleyicisinin olumsuzu **bazı** niceleyicisidir.

• $(\exists x, p(x))' \equiv \forall x, p'(x)$

• $(\forall x, p(x))' \equiv \exists x, p'(x)$



- $\exists$ ile $\forall$ sembolleri birbirinin değildir.
- $=$ ile $\neq$ sembolleri birbirinin değildir.
- $>$ ile $\leq$ sembolleri birbirinin değildir.
- $<$ ile $\geq$ sembolleri birbirinin değildir.

ÖRNEK

$$(\forall x \in \mathbb{Z}, x > x^2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1)$$

önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\forall x \in \mathbb{Z}, x > x^2) \vee (\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1)$

B) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x > x^2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = -1)$

C) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq x^2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1)$

D) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x < x^2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1)$

E) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq x^2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = -1)$

TANIM, AKSİYOM, TEOREM VE İSPAT

Her bilim dalının kendine özgü bir dili vardır. Bu dil, günlük yaşamımızda kullandığımız dilden farklı olabilir. Bu tür sözcüklere terim denir. **Örneğin**; açı, hız, eksen vb.

Bir terimi anlamları daha önceden bilinen terimler yardımıyla ifade etmeye **tanım** denir.

Örneğin; matematikte rakam kavramı tanımlanabilir.

“Sayıları ifade etmeye yarayan sembollere rakam denir.”

İspatına gerek duyulmayan önermelere **aksiyom** denir.

Örneğin; “İki farklı noktadan yalnız bir doğru geçer.” önermesi aksiyomdur.

Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere **teorem** denir.

Bir teoremin verilen kısmına **hipotez (varsayım)**, ispatlanacak olan kısmına **hüküm (yargı)** denir.

Bir teoremin hipotezinden hareketle hükmünün doğru olduğunu göstermeye teoremi ispatlamak denir.



$p \Rightarrow q$, bir teorem ise p, teoremin hipotezi, q ise hükmüdür.

ÖRNEK

“İki tek sayının çarpımı tek sayıdır.” önermesi bir teoremdir.

Bu teoremin hipotez ve hükmünü yazalım.