

# TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ VE TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

## PERİYODİK FONKSİYONLAR

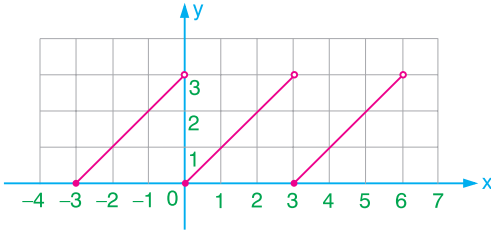
Bazı fonksiyonlar, farklı  $x$  değerlerine karşılık aynı değerleri alarak belli aralıklarda tekrar ederler. Belli aralıklarda tekrarlama özelliğine sahip bu tür fonksiyonlara **periyodik fonksiyonlar** denir.

$A \subset \mathbb{R}$  için  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.

Her  $x \in A$  için,  $f(x + T) = f(x)$  eşitliğini sağlayan bir  $T$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir.

En küçük pozitif  $T$  reel sayısına da  $f$  fonksiyonunun **periyodu** denir.

### ÖRNEK



Şekilde,  $f: [-3, 6) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  periyodik fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Bu fonksiyonun periyodunu bulalım.**

## TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYODU

Trigonometrik fonksiyonlar periyodik fonksiyonlardır.

Belli aralıktaki  $x$  değerleri için aynı değerleri alırlar.

### NOT

Her  $x \in \mathbb{R}$  ve  $k \in \mathbb{Z}$  için,

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x \text{ olur.}$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyodu  **$2\pi$**  dir.

### NOT

Her  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  için,  $\tan(x + k\pi) = \tan x$

Her  $x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$  için,  $\cot(x + k\pi) = \cot x$  olur.

Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyodu  **$\pi$**  dir.

### NOT

$n$  sıfırdan farklı bir tam sayı ve  $a, b, c, k$  birer reel sayı olmak üzere,

$$y = a \cos^n(bx + c) + k$$

$$y = a \sin^n(bx + c) + k$$

fonksiyonlarının periyodu,

$n$  bir tek tam sayı ise  $\frac{2\pi}{|b|}$  dir.

$n$  bir çift tam sayı ise  $\frac{\pi}{|b|}$  dir.

## ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulalım.

a.  $f(x) = \cos 2x$

b.  $f(x) = \sin 5x$

c.  $f(x) = 1 + \cos^2 3x$

d.  $f(x) = \sin\left(-\frac{2x}{5}\right) + 3$

## NOT

n sıfırdan farklı bir tam sayı ve a, b, c, k birer reel sayı olmak üzere,

$$y = a \tan^n(bx + c) + k$$

$$y = a \cot^n(bx + c) + k$$

fonksiyonlarının periyodu  $\frac{\pi}{|b|}$  dir.

## ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulalım.

a.  $f(x) = 2 + \tan 3x$

b.  $f(x) = \cot^2 \frac{x}{4} - 1$

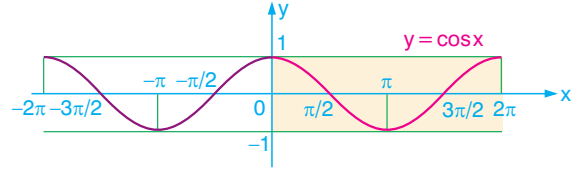


Periyodik f ve g fonksiyonları için, f fonksiyonunun periyodu  $T_1$  ve g fonksiyonunun periyodu  $T_2$  olsun.

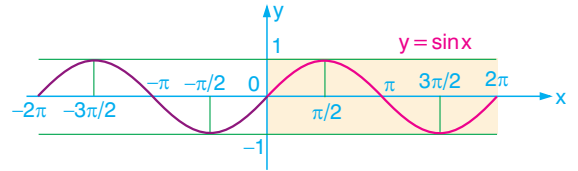
f ve g fonksiyonlarının toplamı veya farkı olan yeni fonksiyonun periyodu,  $\text{EKOK}(T_1, T_2)$  olur.

## TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ

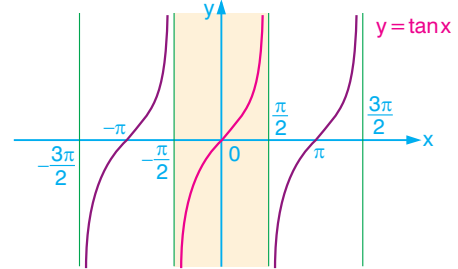
### $y = \cos x$ Fonksiyonunun Grafiği



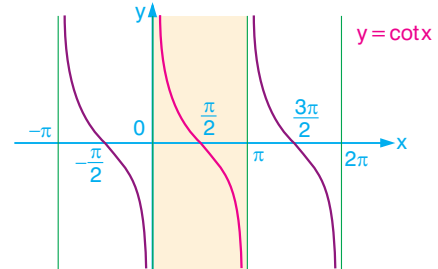
### $y = \sin x$ Fonksiyonunun Grafiği



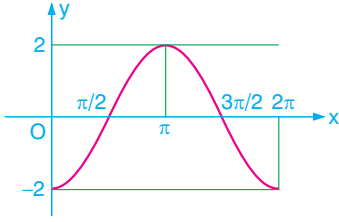
### $y = \tan x$ Fonksiyonunun Grafiği



### $y = \cot x$ Fonksiyonunun Grafiği



### ÖRNEK



Yukarıdaki şekilde,  $[0, 2\pi]$  aralığında grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)  $y = -2\cos x$       B)  $y = -2\sin x$       C)  $y = 1 - \sin x$   
D)  $y = 1 + \cos x$       E)  $y = 2\cos x$

### TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

$f: A \rightarrow B$ ,  $f(x) = y$  fonksiyonu bire bir ve örten ise,  $f^{-1}$  de fonksiyondur.

$$f^{-1}: B \rightarrow A, f^{-1}(y) = x \text{ olur.}$$

Trigonometrik fonksiyonlar bire bir ve örten değildir.

Trigonometrik fonksiyonların bire bir ve örten olduğu tanım ve değer kümeleri içerisinde tersi de fonksiyon olur. Bu fonksiyonlara ters trigonometrik fonksiyonlar denir.

#### Arkkosinüs Fonksiyonu

$f(x) = \cos x$  fonksiyonu  $[0, \pi]$  aralığında bire bir ve örtendir.

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \text{ olmak üzere,}$$

$f(x) = \cos x$  fonksiyonunun tersi,

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$  veya  $f^{-1}(x) = \arccos x$  şeklinde gösterilir.

### NOT

$y = \cos x$  ise  $x = \arccos y$  olur.

$x$  açısının kosinüsü  $y$  ise kosinüsü  $y$  olan açı  $x$  dir.

### ÖRNEK

$$\arccos \frac{1}{2}, \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}, \arccos 0 \text{ ve } \arccos -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ifadelerinin eşitini bulalım.

#### Arksinüs Fonksiyonu

$f(x) = \sin x$  fonksiyonu  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  aralığında bire bir ve örtendir.

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \text{ olmak üzere,}$$

$f(x) = \sin x$  fonksiyonunun tersi,

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$f^{-1}(x) = \sin^{-1}x$  veya  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  şeklinde gösterilir.

### ÖRNEK

$$\arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2}, \arcsin -\frac{1}{2}, \arcsin 1 \text{ ve } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ifadelerinin eşitini bulalım.

### Arktanjanant Fonksiyonu

$f(x) = \tan x$  fonksiyonu  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  aralığında bire bir ve örtendir.

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty) \text{ olmak üzere,}$$

$f(x) = \tan x$  fonksiyonunun tersi,

$$f^{-1} : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$  veya  $f^{-1}(x) = \arctan x$  şeklinde gösterilir.

#### ÖRNEK

$\arctan 1$ ,  $\arctan(-1)$  ve  $\arctan \sqrt{3}$  ifadelerinin eşitini bulalım.

### Arkkotanjanant Fonksiyonu

$f(x) = \cot x$  fonksiyonu  $(0, \pi)$  aralığında bire bir ve örtendir.

$$f : (0, \pi) \rightarrow (-\infty, \infty) \text{ olmak üzere,}$$

$f(x) = \cot x$  fonksiyonunun tersi,

$$f^{-1} : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \pi),$$

$f^{-1}(x) = \cot^{-1}x$  veya  $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$  şeklinde gösterilir.

#### ÖRNEK

$\operatorname{arccot} 1$  ve  $\operatorname{arccot}(-1)$  ifadelerinin eşitini bulalım.



Bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyondur.

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) = x \text{ olduğundan,}$$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x) = x$$

$$\tan(\arctan x) = \arctan(\tan x) = x \text{ olur.}$$

#### ÖRNEK

$$f(x) = \arccos(2x + 3)$$

fonsiyonunun tanım kümesini bulalım.

#### ÖRNEK

$f(x) = 3 - \sin 2x$  fonksiyonunun tersini bulalım.

#### ÖRNEK

$\tan\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$  ifadesinin değerini bulalım.

**ÖRNEK**

$$\sin(\arctan(-1)) + \sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

ifadesinin değerini bulalım.

**ÖRNEK**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{3}\right) + \tan\left(\pi + \operatorname{arccot}\frac{1}{3}\right)$$

işleminin sonucunu bulalım.