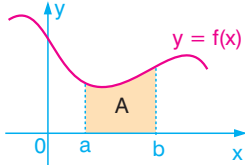


BELİRLİ İNTEGRAL İLE ALAN HESABI

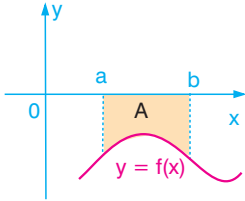
EĞRİ ALTINDA KALAN ALAN

► $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ pozitif tanımlı ($f(x) \geq 0$) ve sürekli bir fonksiyon olsun.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x eksenine ile sınırlanan bölgenin alanı $A = \int_a^b f(x) dx$ tir.

► $y = f(x)$ negatif tanımlı ($f(x) < 0$) ve sürekli bir fonksiyon olsun.



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x eksenine ile sınırlanan bölgenin alanı $A = -\int_a^b f(x) dx$ tir.

ÖRNEK

$f(x) = x^2 + 2x$ eğrisi ile x eksenine arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

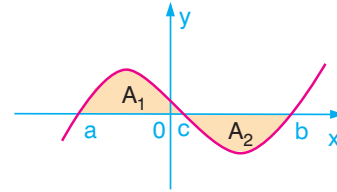
ÖRNEK

$f(x) = x^2 + 1$ eğrisi ile $x = 1$, $x = 3$ doğruları ve x eksenine arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

NOT

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında aşağıdaki gibi A_1 ve A_2 bölgelerinden oluşsun.

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, c]$ aralığında pozitif ve $[c, b]$ aralığında negatif değerli olsun.



$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx \text{ olur.}$$

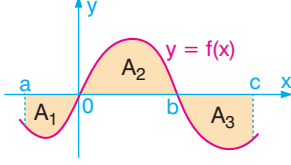
ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu, $x = 0$, $x = 3$ doğruları ve x eksenine arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) $\frac{29}{3}$ B) $\frac{25}{3}$ C) 8 D) $\frac{23}{3}$ E) $\frac{20}{3}$

NOT

$f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı, $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, 0]$ ve $[b, c]$ aralıklarında negatif tanımlı ve $[0, b]$ aralığında pozitif tanımlı ise, her bir parçanın alanı ayrı olarak hesaplanır.

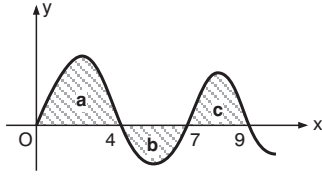


$$A_1 = -\int_a^0 f(x) dx, \quad A_2 = \int_0^b f(x) dx, \quad A_3 = -\int_b^c f(x) dx \text{ tir.}$$

$$\int_a^c f(x) dx = -A_1 + A_2 - A_3 \text{ olur.}$$

$$\int_a^c |f(x)| dx = A_1 + A_2 + A_3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK



Yukarıda verilen taralı bölgelerin alanları sırasıyla a, b ve c birim karedir.

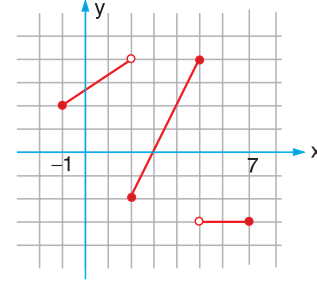
Buna göre, $\int_0^9 |f(x)| dx - \int_0^7 f(x) dx$ değeri kaçtır?

- A) $2a + b$ B) $2a + c$ C) $2b + c$
D) $2c + b$ E) $2a + 2b + c$

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

$[-1, 7]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonun grafiği birim karelere bölünen şekildeki dik koordinat düzleminde verilmiştir.



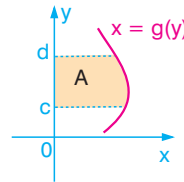
Buna göre, $\int_{-1}^7 f(x) dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

ÖSYM Sorusu

NOT

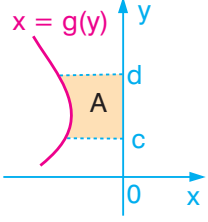
$g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $x = g(y)$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun.



$x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve $x = 0$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanı $A = \int_c^d g(y) dy$ tir.

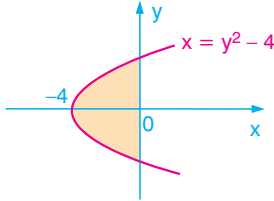
NOT

$g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $x = g(y)$ fonksiyonu negatif tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun.



$x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve $x = 0$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanı $A = -\int_c^d g(y) dy$ tir.

ÖRNEK



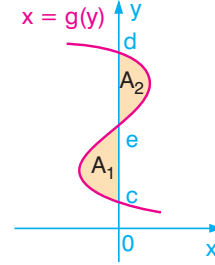
Şekilde $x = y^2 - 4$ eğrisi ile y ekseninin sınırladığı boyalı bölge gösterilmiştir.

Buna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{14}{3}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{32}{3}$

NOT

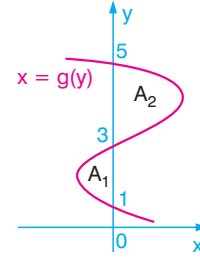
$x = g(y)$ fonksiyonu, $[c, d]$ aralığında hem negatif hem de pozitif değerler alsın.



Bu durumda, $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve $x = 0$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanı,

$$A = A_1 + A_2 = -\int_c^e g(y) dy + \int_e^d g(y) dy = \int_c^d |g(y)| dy \text{ olur.}$$

ÖRNEK



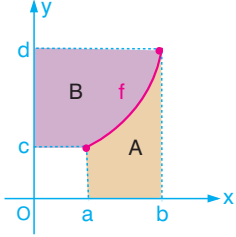
Yukarıdaki şekilde A_1 alanı 5 br^2 ve A_2 alanı 13 br^2 dir.

Buna göre, $\int_1^5 |f(y)| dy$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 18 B) 15 C) 11 D) 8 E) 6

NOT

$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$, $y = f(x)$ fonksiyonu bire bir ve örten olmak üzere, integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

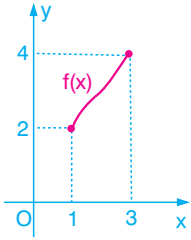


Bu durumda

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$B = \int_c^d f^{-1}(x) dx$$

ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen bire bir ve örten $f: [1, 3] \rightarrow [2, 4]$ fonksiyonunun tersi f^{-1} dir.

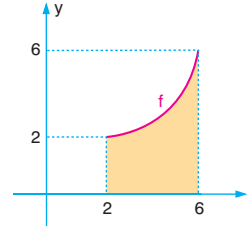
Buna göre, $\int_1^3 f(x) dx + \int_2^4 f^{-1}(x) dx$

toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

ÖRNEK

$[2, 6]$ aralığı üzerinde tanımlı olan bire bir ve örten f fonksiyonunun grafiği veriliyor.



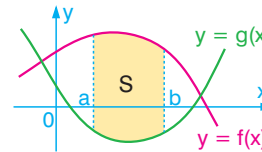
Boyalı bölgenin alanı 13 birimkare olduğuna göre, $\int_2^6 f^{-1}(x) dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

ÖSYM Sorusu

İKİ FONKSİYONUN GRAFİKLERİ ARASINDA KALAN ALAN

$y = f(x)$ eğrisi, $y = g(x)$ eğrisi $x = a$ ve $x = b$ doğrusu arasında kalan taralı bölge verilmiştir.



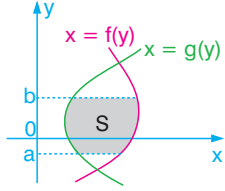
Her $x \in (a, b)$ için $f(x) > g(x)$ tir.

Yukarıdaki eğrinin denkleminin aşağıdaki eğrinin denkleminin çıkarılmasıyla oluşan belirli integral, bölgenin alanını ifade etmektedir.

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

NOT

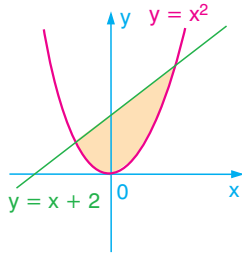
$x = f(y)$ eğrisi $x = g(y)$ eğrisi $y = a$ ve $y = b$ doğrusu arasında kalan taralı bölge verilmiştir.



Bölge (ya da eğriler) hangi konumda olursa olsun, sağdaki eğrinin denkleminin soldaki eğrinin denkleminin çıkarılmasıyla oluşan belirli integral, bölgenin alanını ifade etmektedir.

$$S = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy$$

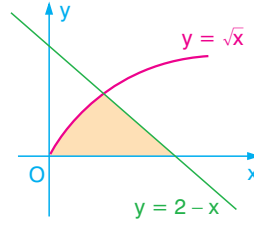
ÖRNEK



Şekildeki $y = x^2$ eğrisi ile $y = x + 2$ doğrusu arasındaki boyalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

ÖRNEK



Şekilde $y = \sqrt{x}$ eğrisi, $y = 2 - x$ doğrusu ve x eksenini arasında kalan boyalı bölge verilmiştir.

Buna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

- A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

ÖRNEK

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

integralinin değeri kaçtır?

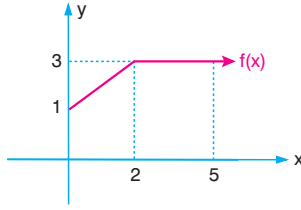
- A) π B) $\pi + 1$ C) $\pi + 2$ D) 2π E) 3π

ÖRNEK

$y = x^3$ eğrisi ve $y = 4x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

ÖRNEK



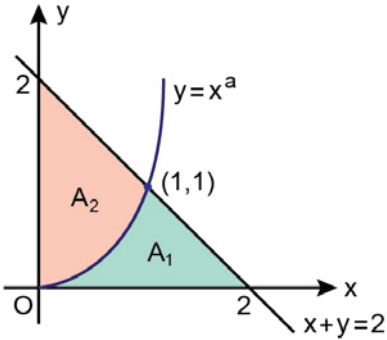
Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\int_0^5 xf'(x) dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÖRNEK

a pozitif bir tam sayı olmak üzere, dik koordinat düzleminde $x + y = 2$ doğrusu ve eksenler arasında kalan üçgensel bölge, $y = x^a$ eğrisi ile şekildeki gibi iki bölgeye ayrılmıştır.



Şekilde; A_2 bölgesinin alanı, A_1 bölgesinin alanının 2 katıdır.

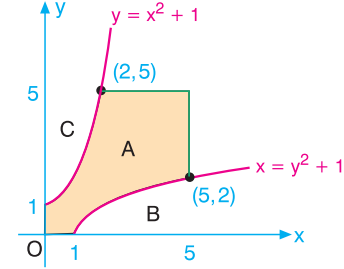
Buna göre, a değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÖSYM Sorusu (2019 AYT)

ÖRNEK

Birinci bölgede; koordinat eksenleri, $x = 5$, $y = 5$ doğruları ve $y = x^2 + 1$, $x = y^2 + 1$ eğrileri arasında kalan A bölgesi aşağıda verilmiştir.



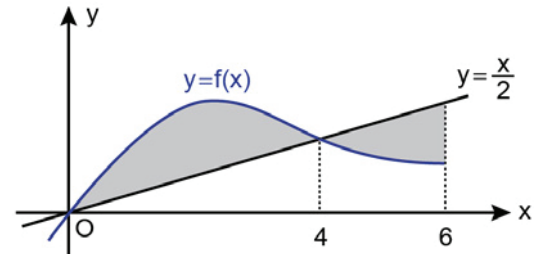
A bölgesinin alanı kaç birim karedir?

- A) $\frac{27}{2}$ B) $\frac{35}{3}$ C) $\frac{43}{3}$ D) $\frac{71}{6}$ E) $\frac{77}{6}$

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

Dik koordinat düzleminde, $y = \frac{x}{2}$ doğrusu ile $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



$$\int_0^4 f(x) dx = 8$$

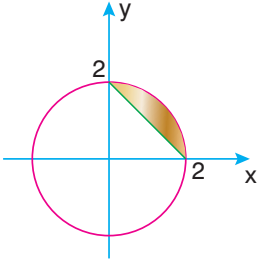
$$\int_4^6 f(x) dx = 3$$

olduğuna göre, boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç birimkaredir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

ÖSYM Sorusu (2019 AYT)

ÖRNEK



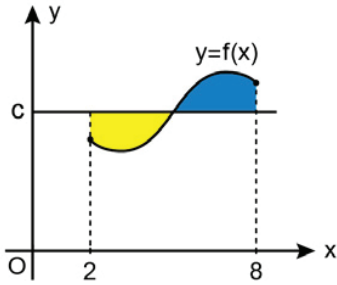
Şekilde $x^2 + y^2 = 4$ çemberi ile $x + y = 2$ doğrusu arasında kalan bölge boyanmıştır.

Buna göre, boyalı bölgenin alanı aşağıdaki integrallerden hangisi ile hesaplanabilir?

- A) $\int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - (2-x)) dx$ B) $\int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - (4-x)) dx$
- C) $\int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - (x+2)) dx$ D) $\int_{-2}^2 (\sqrt{4-x^2} - x) dx$
- E) $\int_0^2 (\sqrt{x^2-4} - x + 2) dx$

ÖRNEK

c pozitif bir gerçel sayı olmak üzere; dik koordinat düzleminde, $y = c$ doğrusu ile $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekildeki mavi bölgenin alanı, sarı bölgenin alanından 2 birimkare fazladır.

$$\int_1^4 f(2x) dx = 28$$

olduğuna göre, c değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

ÖSYM Sorusu (2019 AYT)