

TÜREVİN UYGULAMALARI

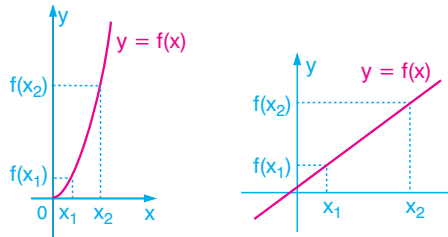
ARTAN FONKSİYONLAR

$B \subset A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

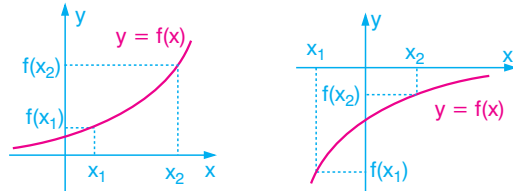
Her $x_1, x_2 \in B$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu B üzerinde **artandır**.

- f fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli ve (a, b) nin her bir noktasında türevli olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f , $[a, b]$ nda **artandır**.

NOT



Yukarıdaki grafiklerde verilen fonksiyonlar artandır.



Şekil-1

Şekil-2

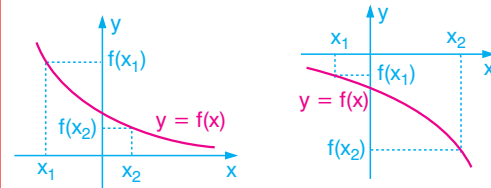
- Şekil-1 de grafiği verilen fonksiyon pozitif değerli ve artandır.
- Şekil-2 de grafiği verilen fonksiyon negatif değerli ve artandır.
- Birinci türevler daima pozitiftir.

AZALAN FONKSİYONLAR

$B \subset A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu B üzerinde **azalandır**.

- f fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli ve (a, b) nin her bir noktasında türevli olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f , $[a, b]$ nda **azalandır**.
- f fonksiyonu $[a, b]$ nda azalan ise $[a, b]$ nin tüm alt aralıklarında da azalandır. O hâlde f fonksiyonu $[a, b]$ nda azalan ise (a, b) nda da azalandır. Aynı durum artanlık için de geçerlidir.

NOT



Şekil-1

Şekil-2

- Şekil-1 de grafiği verilen fonksiyon pozitif değerli ve azalandır.
- Şekil-2 de fonksiyon negatif değerli ve azalandır.
- Birinci türevler daima negatiftir.

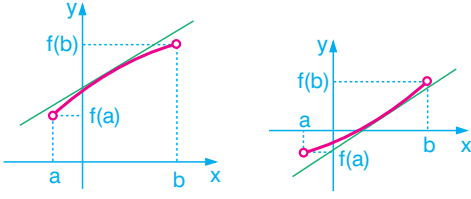


$y = mx + n$ biçimindeki doğrusal fonksiyonda;

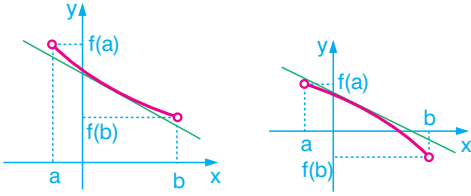
$m > 0$ ise eğim pozitif olduğundan, f , $\mathbb{R}$ de daima artandır.

$m < 0$ ise eğim negatif olduğundan, f , $\mathbb{R}$ de daima azalandır.

NOT



► Yukarıdaki şekilde (a, b) aralığında grafikleri verilen fonksiyonlara (a, b) aralığında çizilebilecek tüm teğetlerin eğimleri pozitifdir. Yani, f fonksiyonunun birinci türevi daima pozitifdir.



► Yukarıdaki şekilde (a, b) aralığında grafikleri verilen fonksiyonlara (a, b) aralığında çizilebilecek tüm teğetlerin eğimleri negatiftir. Yani, f fonksiyonunun birinci türevi daima negatiftir.

NOT

f fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli ve (a, b) nın herbir noktasında türevli olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ ise f, $[a, b]$ nda **sabit fonksiyondur**.



Bir fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıklar belirlenirken ;
birinci türev alınır,
işaret tablosu hazırlanır,
fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıklar belirlenir.

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n$$

fonksiyonu daima artan olduğuna göre, m nin alabileceği en küçük çift tam sayı değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

ÖRNEK

f(x) fonksiyonu, (a, b) aralığında artan ve $f(x) > 0$ dır.

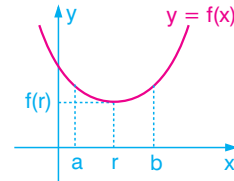
Buna göre,

- I. $xf(x)$
- II. $f^2(x)$
- III. $\frac{1}{f(x)}$

hangileri aynı aralıkta **daima** azalandır?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

YEREL MİNİMUM - MUTLAK MİNİMUM



$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a, b \in A$ olsun.

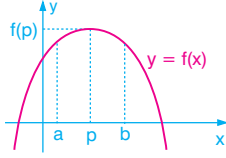
► Her $x \in (a, b)$ için, $f(r) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $r \in (a, b)$ varsa, $x = r$ de **yerel minimumu** vardır. $f(r)$ ye **yerel minimum değeri** denir.

Bu durumda, $(r, f(r))$ yerel minimum noktadır.

► Her $x \in A$ için, $f(r) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $r \in A$ varsa, $x = r$ de **mutlak minimumu** vardır. $f(r)$ ye **mutlak minimum değeri** denir.

Bu durumda, $(r, f(r))$ mutlak minimum noktadır.

YEREL MAKSİMUM - MUTLAK MAKSİMUM



$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a, b \in A$ olsun.

► Her $x \in (a, b)$ için, $f(x) \leq f(p)$ olacak şekilde bir $p \in (a, b)$ varsa, $x = p$ de **yerel maksimumu** vardır. $f(p)$ ye **yerel maksimum değer** denir.

Bu durumda, $(p, f(p))$ yerel maksimum noktadır.

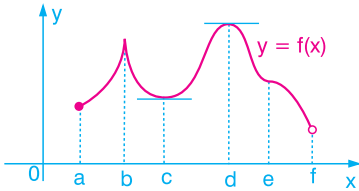
► Her $x \in A$ için, $f(x) \leq f(p)$ olacak şekilde bir $p \in A$ varsa, $x = p$ de **mutlak maksimumu** vardır. $f(p)$ ye **mutlak maksimum değer** denir.

Bu durumda, $(p, f(p))$ mutlak maksimum noktadır.

NOT

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $p \in [a, b]$ olsun.

$f'(p) = 0$ veya $f'(p)$ yoksa p ye f fonksiyonunun bir **kritik noktası** denir.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde;

$x = a$ kritik noktadır. Bu noktada fonksiyonun soldan türevi yoktur fakat yerel ekstremumu vardır.

$x = b$ kritik noktadır. Bu noktada fonksiyona soldan ve sağdan çizilen teğetler farklı olduğundan türev yoktur fakat yerel ekstremumu vardır.

$f'(c) = 0$ ve $f'(d) = 0$ olduğundan $x = c$ ve $x = d$ kritik noktalarıdır. Bu noktalarda yerel ekstremum vardır.

$f'(e) = 0$ olduğundan $x = e$ kritik noktadır, fakat bu noktada yerel ekstremum yoktur.

Grafiği verilen f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisi a, b, c, d ve f dir.

NOT

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in [a, b]$ olsun.

f fonksiyonu $x = p$ noktasında türevlenebilir ve yerel ekstremumu varsa, $f'(p) = 0$ dir.

► $f'(x)$ in işareti $(p, f(p))$ noktasında değişiyorsa bu nokta, $f(x)$ in ekstremum noktasıdır.

Aşağıdaki tabloları inceleyelim.

x	p
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	Azalan Artan

($p, f(p)$) yerel minimum

Yukarıdaki tabloda; $f'(x)$ fonksiyonu $x = p$ nin solunda negatif, sağında pozitif değer almaktadır. f fonksiyonu $x = p$ nin solunda azalan, sağında artan olduğundan $(p, f(p))$ noktası yerel minimum noktasıdır.

x	p
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	Artan Azalan

($p, f(p)$) yerel maksimum

Yukarıdaki tabloda; $f'(x)$ fonksiyonu $x = p$ nin solunda pozitif, sağında negatif değer almaktadır. f fonksiyonu $x = p$ nin solunda artan, sağında azalan olduğundan $(p, f(p))$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

ÖRNEK

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?

- A) $-\frac{4}{3}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) 2

ÖRNEK

$$f(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + n$$

fonksiyonunun yerel maksimum noktası (1, 2) olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

ÖRNEK

$$f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

fonksiyonunun mutlak minimum değeri m ve mutlak maksimum değeri n dir.

Buna göre, $n - m$ farkı kaçtır?

- A) 36 B) 32 C) 30 D) 24 E) 20

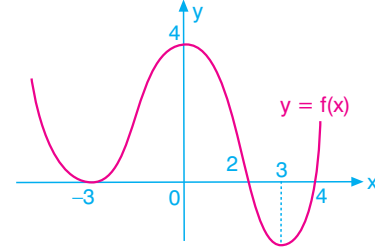
ÖRNEK

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 + 4x + 1$$

fonksiyonunda $f'(x)$ in yerel minimum değeri -5 olduğuna göre, k nin değerleri çarpımı kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -1 D) 0 E) 1

ÖRNEK



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği veriliyor.

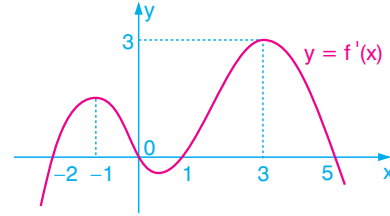
Buna göre,

- I. $-3 < x < 2$ aralığında azalandır.
- II. $x = -3$ te bir yerel ekstremumu vardır.
- III. $x = 3$ de bir yerel minimumu vardır.

yargılarından hangileri her zaman doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

ÖRNEK



Şekilde, $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

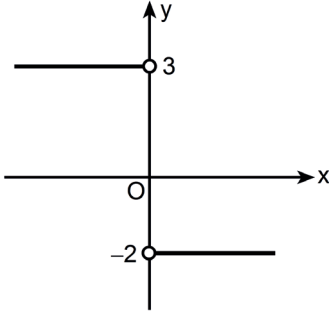
- I. f fonksiyonunun $x = -2$ noktasında yerel minimumu vardır.
- II. f fonksiyonunun $x = 1$ noktasında yerel minimumu vardır.
- III. f fonksiyonunun $x = 5$ noktasında yerel maksimumu vardır.

yargılarından hangileri doğrudur?

- A) I ve III B) Yalnız I C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

ÖRNEK

Aşağıda, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

- I. $f(2) - f(1) = -2$ 'dir.
- II. f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında yerel maksimumu vardır.
- III. İkinci türev fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımlıdır.

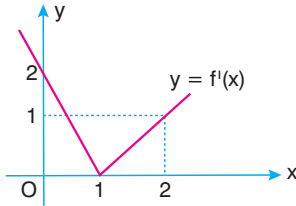
İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I
- B) Yalnız III
- C) I ve II
- D) II ve III
- E) I, II ve III

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun türevi olan f' fonksiyonunun grafiği aşağıdaki dik koordinat düzleminde verilmiştir.



Buna göre; $f(0)$, $f(1)$ ve $f(2)$ değerlerinin doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f(0) < f(1) < f(2)$
- B) $f(0) < f(2) < f(1)$
- C) $f(1) < f(2) < f(0)$
- D) $f(2) < f(0) < f(1)$
- E) $f(2) < f(1) < f(0)$

ÖSYM Sorusu