

BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ, TÜREVLENEBİLİRLİK

BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

► $(f \circ g)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevi:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \text{ olur.}$$

► $(g \circ f)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevi:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = x^3 - x$ ve $g(x) = x^2 + 2$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(g \circ f)'(-1)$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

ÖRNEK

$$g(2) = 5$$

$$g'(2) = 4$$

$$f'(5) = 3 \text{ ise } (f \circ g)'(2) \text{ kaçtır?}$$

ÖRNEK

$$f(3x - 5) = 2x^2 + x - 1$$

olduğuna göre, $f'(1) + f(1)$ kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

ÖSYM Sorusu

ÖRNEK

$$g(x) = x \cdot f(x^2 - x)$$

$$f'(6) = f(6) = -2$$

olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?

- A) -36 B) -32 C) -24 D) -16 E) -12

ÖRNEK

k bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayılar kümesinin birer alt kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları için

$$f(x) = g(x^2) + kx^3$$

eşitliği sağlanmaktadır.

$$f'(-1) = g'(1) = 2$$

olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

ÖSYM Sorusu

NOT

y, u ya bağlı [$y = f(u)$];

u, v ye bağlı [$u = g(v)$];

v, x e bağlı [$v = h(x)$] türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

y nin x e göre türevi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ biçiminde yazılır.}$$

Bu kurala **zincir kuralı** denir.

ÖRNEK

$$y = t^3 + 2t + 1$$

$$t = x^2 - 3x + 5$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 1$ 'deki değeri kaçtır?

NOT

$n \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, f fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

► $f(x) = u$ olmak üzere, $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ olur.

ÖRNEK

$y = (x^3 - 2x + 1)^4$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

ÖRNEK

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

olduğuna göre, $f'(x)$ i bulalım.

ÖRNEK

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot (3x + 2)^3$$

olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

A) 16

B) 24

C) 32

D) 40

E) 56

ÖRNEK

$$f^3(3x) = x^3 + 2x + 5$$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

SOLDAN TÜREV - SAĞDAN TÜREV

$A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun.

► $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitinin bir gerçel sayı değeri varsa limit değeri-

ne **f fonksiyonunun $x = a$ daki soldan türevi** denir ve

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ biçiminde gösterilir.}$$

► $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitinin bir gerçel sayı değeri varsa limit değeri-

ne **f fonksiyonunun $x = a$ daki sağdan türevi** denir ve

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ biçiminde gösterilir.}$$

NOT

$x = a$ noktasında sürekli olan bir fonksiyon için;

► $x = a$ noktasındaki soldan ve sağdan türevleri birbirine eşitse eşitliğin değeri fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevidir.

$f'(a^+) = f'(a^-)$ ise $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi vardır.

► $x = a$ noktasındaki soldan ve sağdan türevleri birbirine eşit değilse fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevi yoktur.

$f'(a^+) \neq f'(a^-)$ ise $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi yoktur.

Fonksiyonun Bir Noktada Türevlenebilirliği

- Bir fonksiyon $x = a$ noktasında türevli ise $x = a$ noktasında sürekli dir.
- Bir fonksiyon $x = a$ noktasında sürekli değil ise $x = a$ noktasında türevi yoktur.
- Bir fonksiyon $x = a$ noktasında sürekli olduğu halde türevi olmayabilir.
- Bir fonksiyonun $x = a$ noktasında türevli olabilmesi için bu noktada sürekli ve **$f'(a^+) = f'(a^-)$** olmalıdır.
- Bir fonksiyonun grafiğinde kırılma noktasında (keskin uç) türev yoktur.

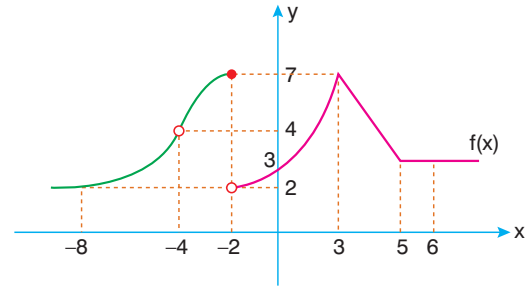
ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2ax - b, & x < 2 \text{ ise} \\ x^2 + 2, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli ise $a + b$ toplamı kaçtır?

ÖRNEK



Yukarıda, $f(x)$ fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre, $(-9, 10)$ aralığında türevli olmadığı noktaların toplamı kaçtır?

ÖRNEK

$$f(x) = \frac{5x - 7}{x^2 - ax + 9}$$

fonksiyonu tüm reel sayılarda türevli ise, a 'nın alabileceği kaç tane tam sayı değeri vardır?

NOT

$f: A \rightarrow \mathbb{R}, y = |f(x)|$ verilsin. $x = a$ için, ($f(a) \neq 0$ olmak üzere) fonksiyonun türevi;

$$y' = \begin{cases} -f'(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \\ f'(x), & f(x) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

► $f(a) = 0$ ise fonksiyonun bu noktada türevi olabilir ya da olmayabilir. Bunu araştırmak için sürekliliğe, sağ ve sol türeve bakılır.

► $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$f(x) = |(ax + b)^n|$ fonksiyonunun $n = 1$ için $x = -\frac{b}{a}$ da türevi yoktur.

$n > 1$ ise türev vardır ve "0"dır.

ÖRNEK

$$f(x) = |x^2 - 3x - 4|$$

olduğuna göre, $f'(3) + f'(5)$ toplamı kaçtır?

ÖRNEK

$$f(x) = |(x^2 - 2x - 3)(x + 1)(x - 2)^3|$$

olduğuna göre, hangi noktalarda türev yoktur?

ÖRNEK

$$f(x) = x \cdot |x| + 2$$

ise $f'(0) = ?$



$y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevi bulunduğundan sonra tekrar türevi alınırsa, ikinci kez türevi alınmış olur.

$y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi $f''(x)$ veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

$$f(x) = 3x^4 - x^2 + x + 1$$

olduğuna göre, $f''(-1)$ değeri kaçtır?

NOT

Bir önceki fasikülde anlık hız - türev ilişkisi anlatılmıştı. Burada anlık ivme - türev ilişkisi için hatırlayalım.

$f(t) = s(t)$ fonksiyonu ile yol alan bir hareketlinin;

► t anındaki anlık hızı $v(t) = s'(t)$ dir.

► t anındaki ivmesi $a(t) = v'(t) = s''(t)$ dir.

Yolun zamana göre türevi hızı ve hızın zamana göre türevi ise ivmeyi verir.

ÖRNEK

Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol $s(t) = 4t^3 - 2t + 1$ (metre) fonksiyonu ile modelleniyor.

Bu hareketlinin 1. saniyedeki ivmesini bulalım.

ÖRNEK



Durgun bir su üzerine damlayan bir su damlası aynı merkezli dairesel dalgalar oluşturmaktadır. Bir dairesel dalganın yarıçapı saniyede 4 cm hızla büyümektedir.

Buna göre, dairesel dalganın yarıçapının 2 cm olduğu anda alanındaki değişim hızı kaç cm^2/sn dir?

- A) 36π B) 32π C) 24π D) 16π E) 12π

ÖRNEK

Gerçel sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu

$$f(x) = x^2 + x - 4$$

biçiminde tanımlanıyor.

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir g fonksiyonunun türevi olan g' fonksiyonu $g'(x) = 0$ eşitliğini yalnızca $x = 2$ değeri için sağlamaktadır.

Buna göre,

$$(g \circ f)'(x) = 0$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 6

ÖSYM Sorusu 2019