

Önerme - III

ANCAK VE ANCAK ($\Leftrightarrow$) BAĞLACI

p ve q iki önerme olmak üzere $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ koşullu önermelerinin $\wedge$ bağlacı ile birbirine bağlanmasıyla oluşan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir.

- $p \Leftrightarrow q$ önermesi “p ancak ve ancak q” diye okunur.

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Örnek

“ $2^2 < 1 + 5 \Leftrightarrow$ Şubat ayı 30 gün çeker.”

iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Aşağıda verilen ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

- a) $(1 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow 1$
b) $(0 \Leftrightarrow 0)' \Leftrightarrow (1 \wedge 0')$

Ancak ve Ancak ($\Leftrightarrow$) Bağlacının Özellikleri

p ve q önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$
- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
- $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

Örnek

$(p \Leftrightarrow 1) \vee (p \Leftrightarrow 0)$

bileşik önermesinin en sade halini bulunuz.

Örnek

$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q' \vee p)'$

bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

YA DA ($\vee$) BAĞLACI

p ile q önermelerinin **ya da** bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önerme $p \vee q$ biçiminde gösterilir.

p ya da q önermesinin doğruluk tablosu:

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- $p \vee q$ bileşik önermesi, önermelerden sadece biri doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

Örnek

“p: En küçük pozitif çift sayı 2’dir.”

“q: Çift sayılarda asal sayı yoktur.”

önermeleri veriliyor.

Buna göre, $p \vee q$ doğruluk değerini bulunuz.

Örnek

$(0 \vee 0)' \vee (1 \vee 0')$

bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Ya Da ($\vee$) Bağlacının Özellikleri

- $p \vee 0 \equiv p$
- $p \vee 1 \equiv 1$
- $p \vee p' \equiv 1$
- $p \vee p \equiv p$
- $p \vee p \equiv 0$
- $p \vee q \equiv q \vee p$ (Değişme özelliği)
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (Birleşme özelliği)

DE MORGAN KURALLARI

p ve q önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- p veya q nun değili: $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$
- p ve q nun değili: $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

Bu kurallara **De Morgan kuralları** denir.

Örnek

$$[(p \wedge q)' \vee q]'$$

bileşik önermesinin en sade halini bulunuz.

AÇIK ÖNERME

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olduğu belirlenen ifadelere **açık önerme** denir.

- Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine **doğruluk kümesi** denir.
- Açık önermeler $p(x)$, $g(x)$, $r(x, y)$, ... biçiminde gösterilir.

Örnek

Açık önerme	Doğruluk kümesi
$p(x) : "x + 1 < 4, x \in \mathbb{Z}^+"$	
$q(x) : "x^3 < 5, x \in \mathbb{N}"$	
$r(x) : " x + 1 \leq 3, x \in \mathbb{Z}"$	
$K(x, y) : "(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0, x, y \in \mathbb{Z}"$	
$R(x, y) : "x + y < 3, x, y \in \mathbb{N}"$	

Yukarıda verilen çizelgede açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

Örnek

$$P(x) : "x^2 \leq 9, x \in \mathbb{N}"$$

önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

NİCELEYİCİLER

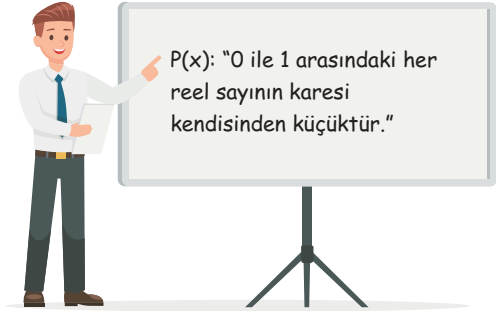
Önüne geldiği elemanın çokluğunu belirten her ($\forall$), bazı ($\exists$) sözcüklerine **niceleyiciler** denir.

- " $\forall x, P(x)$ " ifadesi "**Her x için P(x)**" diye okunur.
- " $\exists x, P(x)$ " ifadesi "**Bazı x için P(x)**" diye okunur.
- Her ($\forall$) niceleyicisi önüne geldiği elemanların tamamını anlattığı için **evrensel niceleyici** adını alır.
- Bazı ($\exists$) niceleyicisi önüne geldiği elemanların en az bir tanesi anlamında kullanıldığı için **varlıksal niceleyici** adını alır.

Örnek

Sembolik mantık kullanılarak verilen " $\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0$ " ifadesini sözel olarak ifade edelim.

Örnek



Hakan öğretmen tahtaya yazdığı açık önermenin sembolik mantık dilinde tahtaya kimin yazabileceğini sınıfına soruyor.

Buna göre, aşağıdaki öğrencilerden hangisinin yazdığı açık önerme doğru yazılıştır?

- A) Ali $P(x) : "\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 1 \Rightarrow x^2 > x"$
- B) Kaan $P(x) : "\exists x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 > x"$
- C) Aylin $P(x) : "\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 \leq x"$
- D) Neşe $P(x) : "\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x"$
- E) Nihal $P(x) : "\forall x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x"$

Açık Önermenin Değili (Olumsuzu)

- $[\exists x, P(x)]' \equiv \forall x, P'(x)$
- $[\forall x, P(x)]' \equiv \exists x, P'(x)$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) p: " $\exists x \in \mathbb{Z}, x^3 + 1 < 0$ "

b) q: " $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$ "

Sembol	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$	$=$	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
Olumsuzu	$\exists$	$\forall$	$\vee$	$\wedge$	$\neq$	$=$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$

Aksiyom: Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önermelere **aksiyom** denir. Örneğin; "Düzlemde farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer."

Teorem: Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere **teorem** denir.

- p ve q iki önerme olmak üzere, p önermesi doğru iken $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi doğru ise $p \Rightarrow q$ önermesi bir teoremdir.
- $p \Rightarrow q$ teoreminde; p ye **hipotez (varsayım)**, q ya da **hüküm (yargı)** denir.

Örnek

p: "Bir noktadan sonsuz tane doğru geçer."

q: "İki tek sayının farkı çift sayıdır."

r: "Bir çarpımın sonucu çift ise çarpanlardan en az biri çifttir."

Yukarıdaki önermeler için aşağıdakilerden hangisinin doğru olduğunu bulunuz.

p	q	r
A) Aksiyom	Teorem	Teorem
B) Teorem	Teorem	Teorem
C) Aksiyom	Aksiyom	Aksiyom
D) Teorem	Aksiyom	Teorem
E) Aksiyom	Teorem	Aksiyom